

## 专题 21 不等式选讲

1. 【2022 年全国甲卷】已知  $a, b, c$  均为正数, 且  $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$ , 证明:

(1)  $a + b + 2c \leq 3$ ;

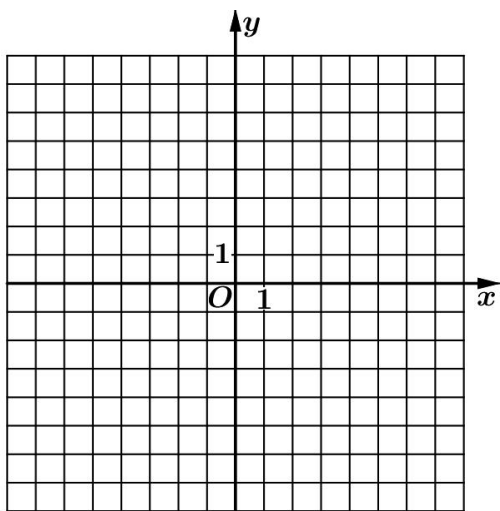
(2) 若  $b = 2c$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$ .

2. 【2022 年全国乙卷】已知  $a, b, c$  都是正数, 且  $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$ , 证明:

(1)  $abc \leq \frac{1}{9}$ ;

(2)  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ ;

3. 【2021 年甲卷文科】已知函数  $f(x) = |x-2|, g(x) = |2x+3| - |2x-1|$ .



(1) 画出  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图像;

(2) 若  $f(x+a) \geq g(x)$ , 求  $a$  的取值范围.

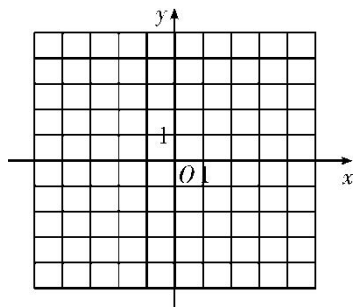
4. 【2021 年乙卷文科】已知函数  $f(x) = |x-a| + |x+3|$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 若  $f(x) > -a$ , 求  $a$  的取值范围.

5. 【2020 年新课标 1 卷理科】已知函数  $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$ .

(1) 画出  $y = f(x)$  的图像;



(2) 求不等式  $f(x) > f(x+1)$  的解集.

6. 【2020 年新课标 2 卷理科】已知函数  $f(x) = |x - a^2| + |x - 2a + 1|$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 求不等式  $f(x) \geq 4$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq 4$ , 求  $a$  的取值范围.

7. 【2020 年新课标 3 卷理科】设  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a+b+c=0$ ,  $abc=1$ .

(1) 证明:  $ab+bc+ca < 0$ ;

(2) 用  $\max\{a, b, c\}$  表示  $a, b, c$  中的最大值, 证明:  $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$ .

8. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知  $a, b, c$  为正数, 且满足  $abc=1$ . 证明:

(1)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$ ;

(2)  $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$ .

9. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知  $f(x) = |x - a| + |x - 2| + (x - a)$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) < 0$  的解集;

(2) 若  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f(x) < 0$ , 求  $a$  的取值范围.

10. 【2019 年新课标 3 卷理科】设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 且  $x + y + z = 1$ .

(1) 求  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$  的最小值;

(2) 若  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$  成立, 证明:  $a \leq -3$  或  $a \geq -1$ .

11. 【2018 年新课标 1 卷理科】已知  $f(x) = |x+1| - |ax-1|$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) > 1$  的解集;

(2) 若  $x \in (0, 1)$  时不等式  $f(x) > x$  成立, 求  $a$  的取值范围.

12. 【2018 年新课标 2 卷理科】设函数  $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 0$  的解集;

(2) 若  $f(x) \leq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

13. 【2018 年新课标 3 卷理科】设函数  $f(x) = |2x+1| + |x-1|$ .

(1) 画出  $y = f(x)$  的图像;

(2) 当  $x \in [0, +\infty)$ ,  $f(x) \leq ax+b$ , 求  $a+b$  的最小值.

