

专题 21 不等式选讲

1. 【2022 年全国甲卷】已知 a, b, c 均为正数, 且 $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$, 证明:

(1) $a + b + 2c \leq 3$;

(2) 若 $b = 2c$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【解析】

【分析】

(1) 根据 $a^2 + b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + (2c)^2$, 利用柯西不等式即可得证;

(2) 由 (1) 结合已知可得 $0 < a + 4c \leq 3$, 即可得到 $\frac{1}{a+4c} \geq \frac{1}{3}$, 再根据权方和不等式即可得证.

(1)

证明: 由柯西不等式有 $[a^2 + b^2 + (2c)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + 2c)^2$,

所以 $a + b + 2c \leq 3$,

当且仅当 $a = b = 2c = 1$ 时, 取等号,

所以 $a + b + 2c \leq 3$;

(2)

证明: 因为 $b = 2c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 由 (1) 得 $a + b + 2c = a + 4c \leq 3$,

即 $0 < a + 4c \leq 3$, 所以 $\frac{1}{a+4c} \geq \frac{1}{3}$,

由权方和不等式知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{4c} \geq \frac{(1+2)^2}{a+4c} = \frac{9}{a+4c} \geq 3$,

当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{4c}$, 即 $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

2. 【2022 年全国乙卷】已知 a, b, c 都是正数, 且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$, 证明:

(1) $abc \leq \frac{1}{9}$;

(2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$;

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用三元均值不等式即可证明；

(2) 利用基本不等式及不等式的性质证明即可.

(1)

证明：因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，则 $a^{\frac{3}{2}} > 0$ ， $b^{\frac{3}{2}} > 0$ ， $c^{\frac{3}{2}} > 0$ ，

所以 $\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot c^{\frac{3}{2}}}$ ，

即 $(abc)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{3}$ ，所以 $abc \leq \frac{1}{9}$ ，当且仅当 $a^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2}}$ ，即 $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 时取等号.

(2)

证明：因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，

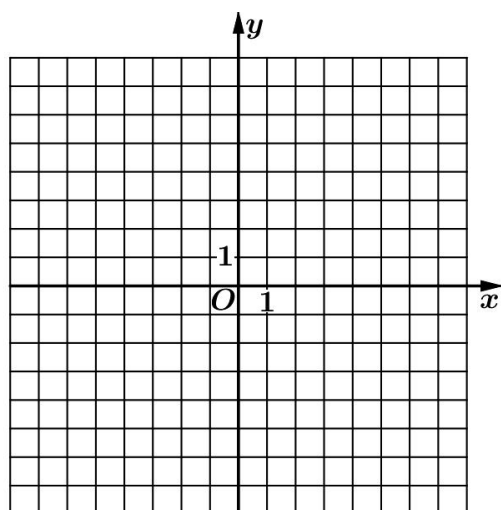
所以 $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ ， $a + c \geq 2\sqrt{ac}$ ， $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，

所以 $\frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$ ， $\frac{b}{a+c} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$ ， $\frac{c}{a+b} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}} = \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取等号.

3. 【2021 年甲卷文科】已知函数 $f(x) = |x-2|$ ， $g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.



(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像；

(2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$ ，求 a 的取值范围.

【答案】(1) 图像见解析；(2) $a \geq \frac{11}{2}$

【解析】

【分析】

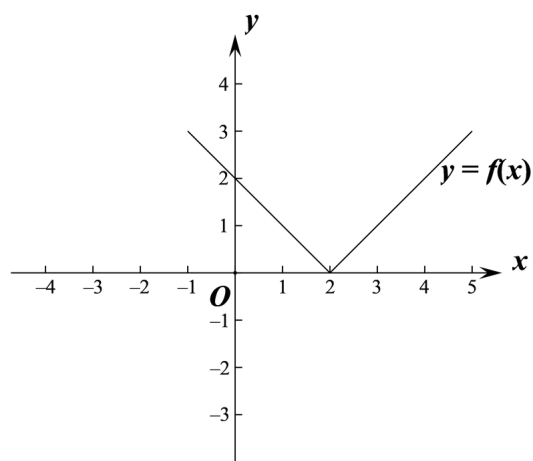
(1) 分段去绝对值即可画出图像；

(2) 根据函数图像数形结合可得需将 $y = f(x)$ 向左平移可满足同角，求得 $y = f(x+a)$ 过

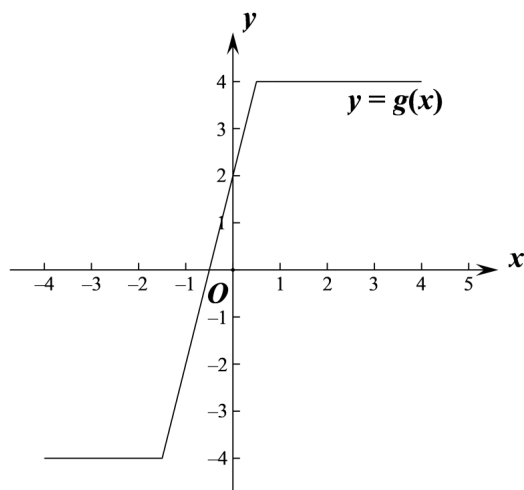
$A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 时 a 的值可求.

【详解】

(1) 可得 $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$ ，画出图像如下：



$g(x) = |2x+3| - |2x-1| = \begin{cases} -4, & x < -\frac{3}{2} \\ 4x+2, & -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ，画出函数图像如下：



(2) $f(x+a) = |x+a-2|$,

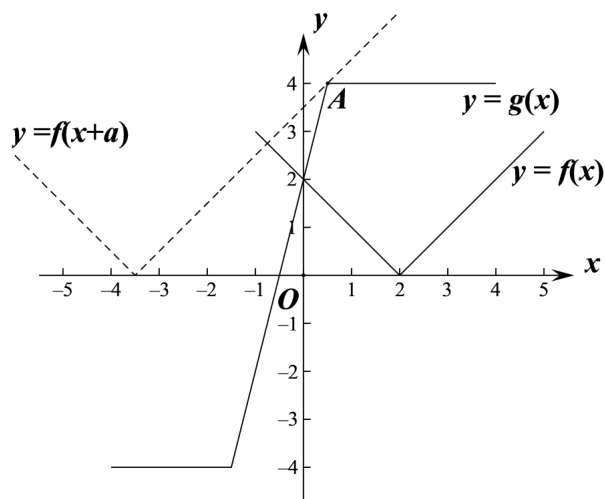
如图，在同一个坐标系里画出 $f(x), g(x)$ 图像，

$y = f(x+a)$ 是 $y = f(x)$ 平移了 $|a|$ 个单位得到，

则要使 $f(x+a) \geq g(x)$ ，需将 $y = f(x)$ 向左平移，即 $a > 0$ ，

当 $y = f(x+a)$ 过 $A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 时， $|\frac{1}{2} + a - 2| = 4$ ，解得 $a = \frac{11}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}$ （舍去），

则数形结合可得需至少将 $y = f(x)$ 向左平移 $\frac{11}{2}$ 个单位， $\therefore a \geq \frac{11}{2}$ 。



【点睛】

关键点睛：本题考查绝对值不等式的恒成立问题，解题的关键是根据函数图像数形结合求解。

4. 【2021 年乙卷文科】已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集；

(2) 若 $f(x) > -a$ ，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$. (2) $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

【解析】

【分析】

(1) 利用绝对值的几何意义求得不等式的解集.

(2) 利用绝对值不等式化简 $f(x) > -a$ ，由此求得 a 的取值范围.

【详解】

(1) [方法一]: 绝对值的几何意义法

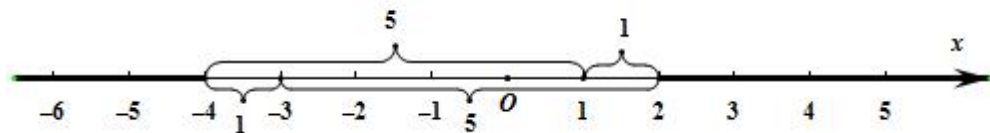
当 $a=1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+3|$, $|x-1| + |x+3|$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和,

则 $f(x) \geq 6$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和不小于 6,

当 $x = -4$ 或 $x = 2$ 时所对应的数轴上的点到 1, -3 所对应的点距离之和等于 6,

$\therefore$ 数轴上到 1, -3 所对应的点距离之和等于大于等于 6 得到所对应的坐标的范围是 $x \leq -4$ 或 $x \geq 2$,

所以 $f(x) \geq 6$ 的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.



[方法二] 【最优解】: 零点分段求解法

当 $a=1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+3|$.

当 $x \leq -3$ 时, $(1-x) + (-x-3) \geq 6$, 解得 $x \leq -4$;

当 $-3 < x < 1$ 时, $(1-x) + (x+3) \geq 6$, 无解;

当 $x \geq 1$ 时, $(x-1) + (x+3) \geq 6$, 解得 $x \geq 2$.

综上, $|x-1| + |x+3| \geq 6$ 的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

(2) [方法一]: 绝对值不等式的性质法求最小值

依题意 $f(x) > -a$, 即 $|x-a| + |x+3| > -a$ 恒成立,

$$|x-a| + |x+3| = |a-x| + |x+3| \geq |a+3|,$$

当且仅当 $(a-x)(x+3) \geq 0$ 时取等号，

$$\therefore f(x)_{\min} = |a+3|,$$

$$\text{故 } |a+3| > -a,$$

所以 $a+3 > -a$ 或 $a+3 < a$,

$$\text{解得 } a > -\frac{3}{2}.$$

所以 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

[方法二] 【最优解】：绝对值的几何意义法求最小值

由 $|x-a|$ 是数轴上数 x 表示的点到数 a 表示的点的距离，得 $f(x) = |x-a| + |x+3| \geq |a+3|$,

故 $|a+3| > -a$ ，下同解法一.

[方法三]：分类讨论+分段函数法

当 $a \leq -3$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} -2x+a-3, & x < a, \\ -a-3, & a \leq x \leq -3, \\ 2x-a+3, & x > -3, \end{cases}$$

则 $[f(x)]_{\min} = -a-3$ ，此时 $-a-3 > -a$ ，无解.

当 $a > -3$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} -2x+a-3, & x < -3, \\ a+3, & -3 \leq x \leq a, \\ 2x-a+3, & x > a, \end{cases}$$

则 $[f(x)]_{\min} = a+3$ ，此时，由 $a+3 > -a$ 得， $a > -\frac{3}{2}$.

综上， a 的取值范围为 $a > -\frac{3}{2}$.

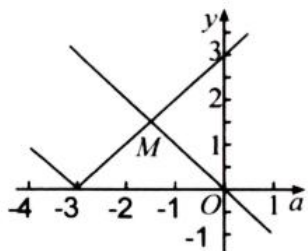
[方法四]：函数图象法解不等式

由方法一求得 $f(x)_{\min} = |a+3|$ 后，构造两个函数 $y = |a+3|$ 和 $y = -a$ ，

$$\text{即 } y = \begin{cases} -a-3, & a < -3, \\ a+3, & a \geq -3 \end{cases} \text{ 和 } y = -a,$$

如图，两个函数的图像有且仅有一个交点 $M\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

由图易知 $|a+3| > -a$ ，则 $a > -\frac{3}{2}$.



【整体点评】

(1) 解绝对值不等式的方法有几何意义法，零点分段法.

方法一采用几何意义方法，适用于绝对值部分的系数为 1 的情况，

方法二使用零点分段求解法，适用于更广泛的情况，为最优解；

(2) 方法一，利用绝对值不等式的性质求得 $f(x)_{\min} = |a+3|$ ，利用不等式恒成立的意义得到关于 a 的不等式，然后利用绝对值的意义转化求解；

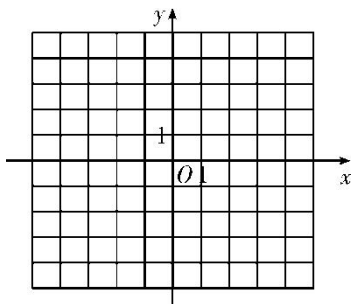
方法二与方法一不同的是利用绝对值的几何意义求得 $f(x)$ 的最小值，最有简洁快速，为最优解法

方法三利用零点分区间转化为分段函数利用函数单调性求 $f(x)$ 最小值，要注意函数 $f(x)$ 中的各绝对值的零点的大小关系，采用分类讨论方法，使用与更广泛的情况；

方法四与方法一的不同在于得到函数 $f(x)$ 的最小值后，构造关于 a 的函数，利用数形结合思想求解关于 a 的不等式.

5. 【2020 年新课标 1 卷理科】已知函数 $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 的图像；



(2) 求不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集.

【答案】(1) 详解解析；(2) $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$.

【解析】

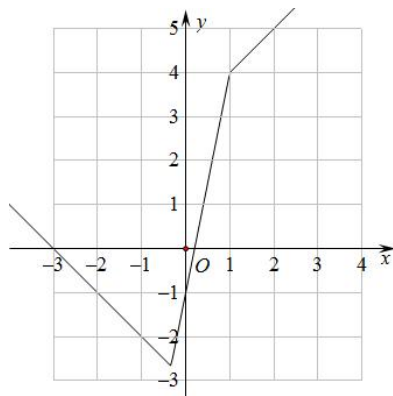
【分析】

(1) 根据分段讨论法, 即可写出函数 $f(x)$ 的解析式, 作出图象;

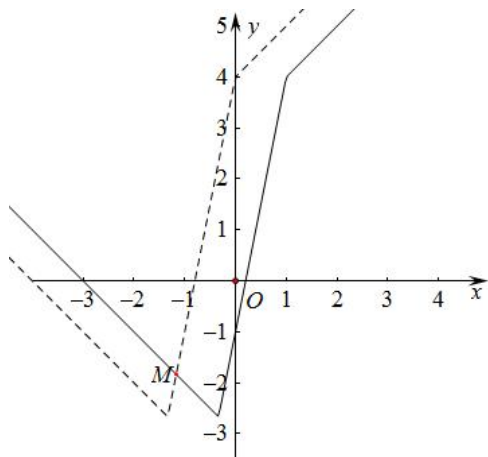
(2) 作出函数 $f(x+1)$ 的图象, 根据图象即可解出.

【详解】

(1) 因为 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 1 \\ 5x-1, & -\frac{1}{3} < x < 1 \\ -x-3, & x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$, 作出图象, 如图所示:



(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位, 可得函数 $f(x+1)$ 的图象, 如图所示:



由 $-x-3=5(x+1)-1$, 解得 $x=-\frac{7}{6}$.

所以不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集为 $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$.

【点睛】

本题主要考查画分段函数的图象, 以及利用图象解不等式, 意在考查学生的数形结合能力, 属于基础题.

6. 【2020 年新课标 2 卷理科】已知函数 $f(x) = |x-a^2| + |x-2a+1|$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq 4$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$; (2) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

【解析】

【分析】

(1) 分别在 $x \leq 3$ 、 $3 < x < 4$ 和 $x \geq 4$ 三种情况下解不等式求得结果;

(2) 利用绝对值三角不等式可得到 $f(x) \geq (a-1)^2$, 由此构造不等式求得结果.

【详解】

(1) 当 $a=2$ 时, $f(x) = |x-4| + |x-3|$.

当 $x \leq 3$ 时, $f(x) = 4-x+3-x = 7-2x \geq 4$, 解得: $x \leq \frac{3}{2}$;

当 $3 < x < 4$ 时, $f(x) = 4-x+x-3 = 1 \geq 4$, 无解;

当 $x \geq 4$ 时, $f(x) = x-4+x-3 = 2x-7 \geq 4$, 解得: $x \geq \frac{11}{2}$;

综上所述: $f(x) \geq 4$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$.

(2) $f(x) = |x-a^2| + |x-2a+1| \geq \left| (x-a^2) - (x-2a+1) \right| = |-a^2+2a-1| = (a-1)^2$ (当且仅当 $2a-1 \leq x \leq a^2$ 时取等号),

$\therefore (a-1)^2 \geq 4$, 解得: $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

【点睛】

本题考查绝对值不等式的求解、利用绝对值三角不等式求解最值的问题, 属于常考题型.

7. 【2020 年新课标 3 卷理科】设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.

(1) 证明: $ab+bc+ca < 0$;

(2) 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

【答案】(1) 证明见解析 (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 方法一: 由 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$ 结合不等式的性质, 即可得出证明;

(2) 方法一: 不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$, 因为 $a+b+c=0, abc=1$, 所以 $a > 0, b < 0, c < 0$,

$a = (-b) + (-c) \geq 2\sqrt{bc} = 2\sqrt{\frac{1}{a}}$, 则 $a^3 \geq 4, a \geq \sqrt[3]{4}$. 故原不等式成立.

【详解】

(1) [方法一] 【最优解】: 通性通法

$$\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0,$$

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

$$\because abc=1, \therefore a, b, c \text{ 均不为 } 0, \text{ 则 } a^2+b^2+c^2 > 0, \therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) < 0.$$

[方法二]: 消元法

$$\text{由 } a+b+c=0 \text{ 得 } b=-(a+c), \text{ 则 } ab+bc+ca = b(a+c)+ca = -(a+c)^2+ac = -(a^2+ac+c^2)$$

$$= -\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}c^2 \leq 0, \text{ 当且仅当 } a=b=c=0 \text{ 时取等号},$$

又 $abc=1$, 所以 $ab+bc+ca < 0$.

[方法三]: 放缩法

方式 1: 由题意知 $a \neq 0, a+b+c=0, a=-(c+b), a^2=(c+b)^2=c^2+b^2+2cb \geq 4bc$, 又

$$ab+bc+ca = a(b+c)+bc = -a^2+bc \leq -a^2+\frac{a^2}{4} = -\frac{3a^2}{4} < 0, \text{ 故结论得证}.$$

方式 2: 因为 $a+b+c=0$,

$$\text{所以 } 0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)] + 2ab+2bc+2ca$$

$$\geq \frac{1}{2}(2ab+2bc+2ca) + 2ab+2bc+2ca = 3(ab+bc+ca).$$

即 $ab+bc+ca \leq 0$, 当且仅当 $a=b=c=0$ 时取等号,

又 $abc=1$, 所以 $ab+bc+ca < 0$.

[方法四]:

因为 $a+b+c=0, abc=1$, 所以 a, b, c 必有两个负数和一个正数,

不妨设 $a \leq b < 0 < c$, 则 $a=-(b+c), \therefore ab+bc+ca = bc+a(c+b) = bc-a^2 < 0$.

[方法五]: 利用函数的性质

$$\text{方式 1: } 6b=-(a+c), \text{ 令 } f(c)=ab+bc+ca=-c^2-ac-a^2,$$

二次函数对应的图像开口向下, 又 $abc=1$, 所以 $a \neq 0$,

判别式 $\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$ ，无根，

所以 $f(c) < 0$ ，即 $ab + bc + ca < 0$ 。

方式 2：设 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + (ab+bc+ca)x - 1$ ，

则 $f(x)$ 有 a, b, c 三个零点，若 $ab + bc + ca \geq 0$ ，

则 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，不可能有三个零点，

所以 $ab + bc + ca < 0$ 。

(2) [方法一] 【最优解】：通性通法

不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$ ，因为 $a + b + c = 0, abc = 1$ ，所以 $a > 0, b < 0, c < 0$ ，

$$a = (-b) + (-c) \geq 2\sqrt{bc} = 2\sqrt{\frac{1}{a}},$$

则 $a^3 \geq 4, a \geq \sqrt[3]{4}$ 。故原不等式成立。

[方法二]：

不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$ ，因为 $a + b + c = 0, abc = 1$ ，所以 $a > 0$ ，且 $\begin{cases} b + c = -a, \\ bc = \frac{1}{a}, \end{cases}$

则关于 x 的方程 $x^2 + ax + \frac{1}{a} = 0$ 有两根，其判别式 $\Delta = a^2 - \frac{4}{a} \geq 0$ ，即 $a \geq \sqrt[3]{4}$ 。

故原不等式成立。

[方法三]：

不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$ ，则 $a > 0, b = -(a+c), abc = 1, -(a+c)ac = 1, ac^2 + a^2c + 1 = 0$ ，关于 c

的方程有解，判别式 $\Delta = (a^2)^2 - 4a \geq 0$ ，则 $a^3 \geq 4, a \geq \sqrt[3]{4}$ 。故原不等式成立。

[方法四]：反证法

假设 $\max\{a, b, c\} < \sqrt[3]{4}$ ，不妨令 $a \leq b < 0 < \sqrt[3]{4}$ ，则 $ab = \frac{1}{c} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ， $-a - b = c < \sqrt[3]{4}$ ，又

$$\sqrt[3]{4} > -a - b \geq 2\sqrt{ab} > \frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = 2^{1-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}，矛盾，故假设不成立。即 \max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}，命题得$$

证。

【整体点评】

(1) 方法一：利用三项平方和的展开公式结合非零平方为正数即可证出，证法常规，为本题的通性通法，也是最优解法；方法二：利用消元法结合一元二次函数的性质即可证出；方

法三：利用放缩法证出；方法四：利用符号法则结合不等式性质即可证出；方法五：利用函数的性质证出。

(2) 方法一：利用基本不等式直接证出，是本题的通性通法，也是最优解；

方法二：利用一元二次方程根与系数的关系以及方程有解的条件即可证出；方法三：利用消元法以及一元二次方程有解的条件即可证出；方法四：利用反证法以及基本不等式即可证出。

8. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知 a, b, c 为正数，且满足 $abc=1$ 。证明：

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2;$$

$$(2) (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24.$$

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用 $abc=1$ 将所证不等式可变为证明： $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ac + ab$ ，利用基本不等式可证得 $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$ ，从而得到结论；(2) 利用基本不等式可得

$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$ ，再次利用基本不等式可将式转化为

$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24\sqrt{(abc)^2}$ ，在取等条件一致的情况下，可得结论。

【详解】

$$(1) \because abc=1 \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot abc = bc + ac + ab$$

$$\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号

$$\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \text{ 即: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$(2) \because (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 3(a+b)(b+c)(c+a), \text{ 当且仅当 } a=b=c \text{ 时取等号}$$

又 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ， $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ ， $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ （当且仅当 $a=b=c$ 时等号同时成立）

$$\therefore (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 3 \times 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ac} = 24\sqrt{(abc)^2}$$

$$\text{又 } abc=1 \quad \therefore (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$$

【点睛】

本题考查利用基本不等式进行不等式的证明问题，考查学生对于基本不等式的变形和应用能

力，需要注意的是在利用基本不等式时需注意取等条件能否成立.

9. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知 $f(x) = |x-a| + |x+|x-2|(x-a)$.

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) < 0$ 的解集；

(2) 若 $x \in (-\infty, 1)$ 时， $f(x) < 0$ ，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $(-\infty, 1)$ ；(2) $[1, +\infty)$

【解析】

【分析】

(1) 根据 $a=1$ ，将原不等式化为 $|x-1| + |x+|x-2|(x-1)| < 0$ ，分别讨论 $x < 1$ ， $1 \leq x < 2$ ， $x \geq 2$ 三种情况，即可求出结果；

(2) 分别讨论 $a \geq 1$ 和 $a < 1$ 两种情况，即可得出结果.

【详解】

(1) 当 $a=1$ 时，原不等式可化为 $|x-1| + |x+|x-2|(x-1)| < 0$ ；

当 $x < 1$ 时，原不等式可化为 $(1-x)x + (2-x)(x-1) < 0$ ，即 $(x-1)^2 > 0$ ，显然成立，

此时解集为 $(-\infty, 1)$ ；

当 $1 \leq x < 2$ 时，原不等式可化为 $(x-1)x + (2-x)(x-1) < 0$ ，解得 $x < 1$ ，此时解集为空集；

当 $x \geq 2$ 时，原不等式可化为 $(x-1)x + (x-2)(x-1) < 0$ ，即 $(x-1)^2 < 0$ ，显然不成立；此时解集为空集；

综上，原不等式的解集为 $(-\infty, 1)$ ；

(2) 当 $a \geq 1$ 时，因为 $x \in (-\infty, 1)$ ，所以由 $f(x) < 0$ 可得 $(a-x)x + (2-x)(x-a) < 0$ ，

即 $(x-a)(x-1) > 0$ ，显然恒成立；所以 $a \geq 1$ 满足题意；

当 $a < 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} 2(x-a), & a \leq x < 1 \\ 2(x-a)(1-x), & x < a \end{cases}$ ，因为 $a \leq x < 1$ 时， $f(x) < 0$ 显然不能成立，所以 $a < 1$

不满足题意；

综上， a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

【点睛】

本题主要考查含绝对值的不等式，熟记分类讨论的方法求解即可，属于常考题型.

10. 【2019 年新课标 3 卷理科】设 $x, y, z \in \mathbf{R}$ ，且 $x+y+z=1$.

(1) 求 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值；

(2) 若 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$ 成立, 证明: $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$.

【答案】(1) $\frac{4}{3}$; (2) 见详解.

【解析】

【分析】

(1) 根据条件 $x+y+z=1$, 和柯西不等式得到 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \geq \frac{4}{3}$, 再讨论 x, y, z 是否可以达到等号成立的条件. (2) 恒成立问题, 柯西不等式等号成立时构造的 x, y, z 代入原不等式, 便可得到参数 a 的取值范围.

【详解】

(1) $[(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq [(x-1) + (y+1) + (z+1)]^2 = (x+y+z+1)^2 = 4$ 故

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \geq \frac{4}{3}$ 等号成立当且仅当 $x-1 = y+1 = z+1$ 而又因 $x+y+z=1$, 解得

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ 时等号成立}$$

所以 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

(2)

因为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$, 所以 $[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq 1$.

根据柯西不等式等号成立条件, 当 $x-2 = y-1 = z-a$, 即 $\begin{cases} x = 2 - \frac{a+2}{3} \\ y = 1 - \frac{a+2}{3} \\ z = a - \frac{a+2}{3} \end{cases}$ 时有

$[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) = (x-2+y-1+z-a)^2 = (a+2)^2$ 成立.

所以 $(a+2)^2 \geq 1$ 成立, 所以有 $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$.

【点睛】

两个问都是考查柯西不等式, 属于柯西不等式的常见题型.

11. 【2018 年新课标 1 卷理科】已知 $f(x) = |x+1| - |ax-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

(2) 若 $x \in (0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$; (2) $(0,2]$

【解析】

【详解】

分析: (1) 将 $a=1$ 代入函数解析式, 求得 $f(x)=|x+1|-|x-1|$, 利用零点分段将解析式化为

$$f(x)=\begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ 2x, & -1 < x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

然后利用分段函数, 分情况讨论求得不等式 $f(x)>1$ 的解集为

$$\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\};$$

(2) 根据题中所给的 $x \in (0,1)$, 其中一个绝对值符号可以去掉, 不等式 $f(x)>x$ 可以化为

$x \in (0,1)$ 时 $|ax-1|<1$, 分情况讨论即可求得结果.

详解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=|x+1|-|x-1|$, 即 $f(x)=\begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ 2x, & -1 < x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$

故不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$.

(2) 当 $x \in (0,1)$ 时 $|x+1|-|ax-1|>x$ 成立等价于当 $x \in (0,1)$ 时 $|ax-1|<1$ 成立.

若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0,1)$ 时 $|ax-1| \geq 1$;

若 $a > 0$, $|ax-1|<1$ 的解集为 $0 < x < \frac{2}{a}$, 所以 $\frac{2}{a} \geq 1$, 故 $0 < a \leq 2$.

综上, a 的取值范围为 $(0,2]$.

点睛: 该题考查的是有关绝对值不等式的解法, 以及含参的绝对值的式子在某个区间上恒成立求参数的取值范围的问题, 在解题的过程中, 需要会用零点分段法将其化为分段函数, 从而将不等式转化为多个不等式组来解决, 关于第二问求参数的取值范围时, 可以应用题中所给的自变量的范围, 去掉一个绝对值符号, 之后进行分类讨论, 求得结果.

12. 【2018 年新课标 2 卷理科】设函数 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $[-2, 3]$; (2) $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$.

【解析】

【详解】

分析: (1) 先根据绝对值几何意义将不等式化为三个不等式组, 分别求解, 最后求并集, (2) 先化简不等式为 $|x+a|+|x-2| \geq 4$, 再根据绝对值三角不等式得 $|x+a|+|x-2|$ 最小值, 最后解不等式 $|a+2| \geq 4$ 得 a 的取值范围.

详解: (1) 当 $a=1$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \leq -1, \\ 2, & -1 < x \leq 2, \\ -2x+6, & x > 2. \end{cases}$$

可得 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$.

(2) $f(x) \leq 1$ 等价于 $|x+a|+|x-2| \geq 4$.

而 $|x+a|+|x-2| \geq |a+2|$, 且当 $x=2$ 时等号成立. 故 $f(x) \leq 1$ 等价于 $|a+2| \geq 4$.

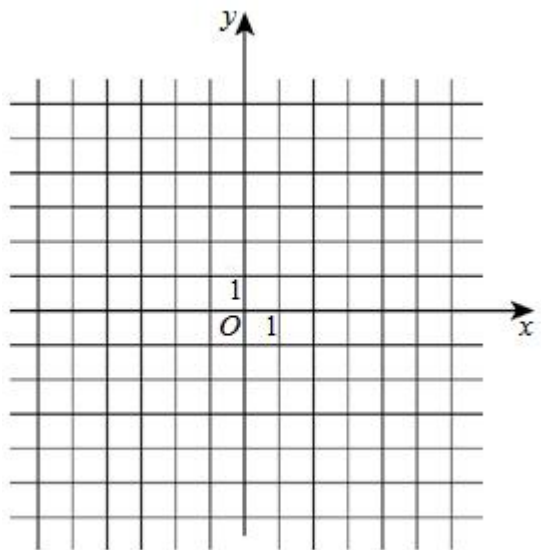
由 $|a+2| \geq 4$ 可得 $a \leq -6$ 或 $a \geq 2$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$.

点睛: 含绝对值不等式的解法有两个基本方法, 一是运用零点分区间讨论, 二是利用绝对值的几何意义求解. 法一是运用分类讨论思想, 法二是运用数形结合思想, 将绝对值不等式与函数以及不等式恒成立交汇、渗透, 解题时强化函数、数形结合与转化化归思想方法的灵活应用, 这是命题的新动向.

13. 【2018 年新课标 3 卷理科】设函数 $f(x) = |2x+1| + |x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图像;

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$, $f(x) \leq ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



【答案】(1) 见解析

(2) 5

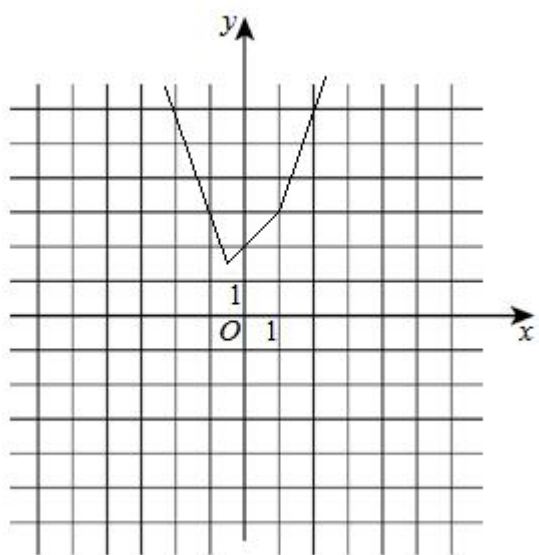
【解析】

【详解】

分析：(1) 将函数写成分段函数，再画出在各自定义域的图像即可．

(2) 结合(1)问可得 a, b 范围，进而得到 $a+b$ 的最小值

详解：(1) $f(x) = \begin{cases} -3x, & x < -\frac{1}{2}, \\ x+2, & -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 3x, & x \geq 1. \end{cases}$ $y = f(x)$ 的图像如图所示．



(2) 由(1)知， $y = f(x)$ 的图像与 y 轴交点的纵坐标为 2，且各部分所在直线斜率的最大

值为3，故当且仅当 $a \geq 3$ 且 $b \geq 2$ 时， $f(x) \leq ax + b$ 在 $[0, +\infty)$ 成立，因此 $a + b$ 的最小值为5.

点睛：本题主要考查函数图像的画法，考查由不等式求参数的范围，属于中档题.

