

专题 15 概率与统计（选择题、填空题）（理科专用）

1. 【2022 年全国乙卷】某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ，且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p ，则（ ）

- A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关 B. 该棋手在第二盘与甲比赛， p 最大
C. 该棋手在第二盘与乙比赛， p 最大 D. 该棋手在第二盘与丙比赛， p 最大

【答案】D

【解析】

【分析】

该棋手连胜两盘，则第二盘为必胜盘. 分别求得该棋手在第二盘与甲比赛且连胜两盘的概率 $p_{\text{甲}}$ ；该棋手在第二盘与乙比赛且连胜两盘的概率 $p_{\text{乙}}$ ；该棋手在第二盘与丙比赛且连胜两盘的概率 $p_{\text{丙}}$. 并对三者进行比较即可解决

【详解】

该棋手连胜两盘，则第二盘为必胜盘，

记该棋手在第二盘与甲比赛，且连胜两盘的概率为 $p_{\text{甲}}$

$$\text{则 } p_{\text{甲}} = 2(1 - p_2)p_1p_3 + 2p_2p_1(1 - p_3) = 2p_1(p_2 + p_3) - 4p_1p_2p_3$$

记该棋手在第二盘与乙比赛，且连胜两盘的概率为 $p_{\text{乙}}$

$$\text{则 } p_{\text{乙}} = 2(1 - p_1)p_2p_3 + 2p_1p_2(1 - p_3) = 2p_2(p_1 + p_3) - 4p_1p_2p_3$$

记该棋手在第二盘与丙比赛，且连胜两盘的概率为 $p_{\text{丙}}$

$$\text{则 } p_{\text{丙}} = 2(1 - p_1)p_3p_2 + 2p_1p_3(1 - p_2) = 2p_3(p_1 + p_2) - 4p_1p_2p_3$$

$$\text{则 } p_{\text{甲}} - p_{\text{乙}} = 2p_1(p_2 + p_3) - 4p_1p_2p_3 - [2p_2(p_1 + p_3) - 4p_1p_2p_3] = 2(p_1 - p_2)p_3 < 0$$

$$p_{\text{乙}} - p_{\text{丙}} = 2p_2(p_1 + p_3) - 4p_1p_2p_3 - [2p_3(p_1 + p_2) - 4p_1p_2p_3] = 2(p_2 - p_3)p_1 < 0$$

即 $p_{\text{甲}} < p_{\text{乙}}$ ， $p_{\text{乙}} < p_{\text{丙}}$ ，

则该棋手在第二盘与丙比赛， p 最大. 选项 D 判断正确；选项 BC 判断错误；

p 与该棋手与甲、乙、丙的比赛次序有关. 选项 A 判断错误.

故选：D

2. 【2022 年新高考 1 卷】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】

由古典概型概率公式结合组合、列举法即可得解.

【详解】

从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，共有 $C_7^2 = 21$ 种不同的取法，

若两数不互质，不同的取法有：(2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (4,6), (4,8), (6,8)，共 7 种，

故所求概率 $P = \frac{21-7}{21} = \frac{2}{3}$.

故选：D.

3. 【2021 年甲卷理科】已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点， P 为 C 上一点，且

$\angle F_1PF_2 = 60^\circ, |PF_1| = 3|PF_2|$ ，则 C 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据双曲线的定义及条件，表示出 $|PF_1|, |PF_2|$ ，结合余弦定理可得答案.

【详解】

因为 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，由双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2|PF_2| = 2a$ ，

所以 $|PF_2| = a$ ， $|PF_1| = 3a$ ；

因为 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，由余弦定理可得 $4c^2 = 9a^2 + a^2 - 2 \times 3a \cdot a \cdot \cos 60^\circ$ ，

整理可得 $4c^2 = 7a^2$ ，所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{7}{4}$ ，即 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 。

故选：A

【点睛】

关键点睛：双曲线的定义是入手点，利用余弦定理建立 a, c 间的等量关系是求解的关键.

4. 【2021 年甲卷理科】将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】

采用插空法，4 个 1 产生 5 个空，分 2 个 0 相邻和 2 个 0 不相邻进行求解.

【详解】

将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，可利用插空法，4 个 1 产生 5 个空，

若 2 个 0 相邻，则有 $C_5^1 = 5$ 种排法，若 2 个 0 不相邻，则有 $C_5^2 = 10$ 种排法，

所以 2 个 0 不相邻的概率为 $\frac{10}{5+10} = \frac{2}{3}$.

故选：C.

5. 【2021 年乙卷理科】在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 中各随机取 1 个数，则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{23}{32}$ C. $\frac{9}{32}$ D. $\frac{2}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】

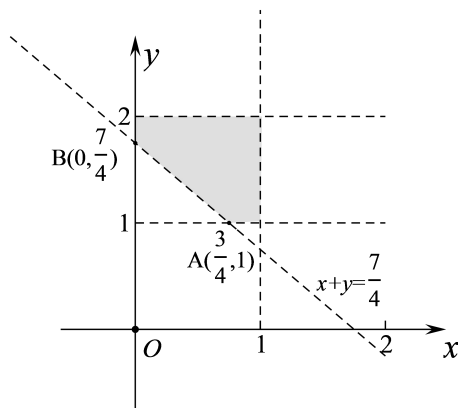
设从区间 $(0, 1), (1, 2)$ 中随机取出的数分别为 x, y ，则实验的所有结果构成区域为

$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$ ，设事件 A 表示两数之和大于 $\frac{7}{4}$ ，则构成的区域为

$A = \{(x, y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2, x + y > \frac{7}{4}\}$ ，分别求出 Ω, A 对应的区域面积，根据几何概型的概率公式即可解出.

【详解】

如图所示：



设从区间 $(0,1), (1,2)$ 中随机取出的数分别为 x, y ，则实验的所有结果构成区域为

$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$ ，其面积为 $S_{\Omega} = 1 \times 1 = 1$ 。

设事件 A 表示两数之和大于 $\frac{7}{4}$ ，则构成的区域为 $A = \{(x, y) | 0 < x < 1, 1 < y < 2, x + y > \frac{7}{4}\}$ ，即图中的阴影部分，其面积为 $S_A = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{32}$ ，所以 $P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{23}{32}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题主要考查利用线性规划解决几何概型中的面积问题，解题关键是准确求出事件 Ω, A 对应的区域面积，即可顺利解出。

6. 【2021 年新高考 1 卷】有 6 个相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（ ）

- A. 甲与丙相互独立
- B. 甲与丁相互独立
- C. 乙与丙相互独立
- D. 丙与丁相互独立

【答案】B

【解析】

【分析】

根据独立事件概率关系逐一判断

【详解】

$$P(\text{甲}) = \frac{1}{6}, P(\text{乙}) = \frac{1}{6}, P(\text{丙}) = \frac{5}{36}, P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(\text{甲丙}) = 0 \neq P(\text{甲})P(\text{丙}), P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36} = P(\text{甲})P(\text{丁}),$$

$$P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36} \neq P(\text{乙})P(\text{丙}), P(\text{丙丁}) = 0 \neq P(\text{丁})P(\text{丙}),$$

故选：B

【点睛】

判断事件 A, B 是否独立，先计算对应概率，再判断 $P(A)P(B) = P(AB)$ 是否成立

7. 【2021 年新高考 2 卷】某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$ ，下列结论中不正确的是（ ）

- A. σ 越小，该物理量在一次测量中在 $(9.9, 10.1)$ 的概率越大
- B. 该物理量在一次测量中大于 10 的概率为 0.5
- C. 该物理量在一次测量中小于 9.99 与大于 10.01 的概率相等
- D. 该物理量在一次测量中落在 $(9.9, 10.2)$ 与落在 $(10, 10.3)$ 的概率相等

【答案】D

【解析】

【分析】

由正态分布密度曲线的特征逐项判断即可得解.

【详解】

对于 A， σ^2 为数据的方差，所以 σ 越小，数据在 $\mu = 10$ 附近越集中，所以测量结果落在 $(9.9, 10.1)$ 内的概率越大，故 A 正确；

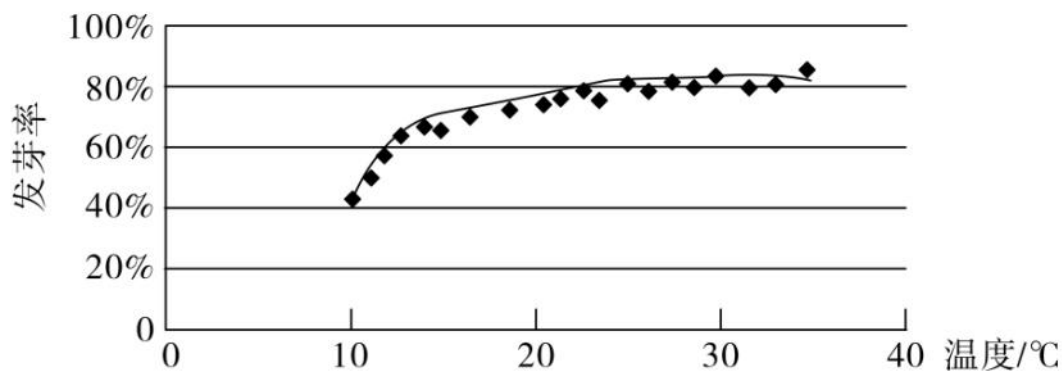
对于 B，由正态分布密度曲线的对称性可知该物理量一次测量大于 10 的概率为 0.5，故 B 正确；

对于 C，由正态分布密度曲线的对称性可知该物理量一次测量结果大于 10.01 的概率与小于 9.99 的概率相等，故 C 正确；

对于 D，因为该物理量一次测量结果落在 $(9.9, 10.0)$ 的概率与落在 $(10.2, 10.3)$ 的概率不同，所以一次测量结果落在 $(9.9, 10.2)$ 的概率与落在 $(10, 10.3)$ 的概率不同，故 D 错误.

故选：D.

8. 【2020 年新课标 1 卷理科】某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在 10°C 至 40°C 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是（ ）

A. $y = a + bx$

B. $y = a + bx^2$

C. $y = a + be^x$

D. $y = a + b \ln x$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据散点图的分布可选择合适的函数模型.

【详解】

由散点图分布可知，散点图分布在一个对数函数的图象附近，

因此，最适合作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 $y = a + b \ln x$.

故选：D.

【点睛】

本题考查函数模型的选择，主要观察散点图的分布，属于基础题.

9. 【2020 年新课标 2 卷理科】在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成 1200 份订单的配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压.为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配货工作.已知该超市某日积压 500 份订单未配货，预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05，志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货，为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95，则至少需要志愿者（ ）

A. 10 名

B. 18 名

C. 24 名

D. 32 名

【答案】B

【解析】

【分析】

算出第二天订单数，除以志愿者每天能完成的订单配货数即可.

【详解】

由题意，第二天新增订单数为 $500+1600-1200=900$ ，

$\frac{900}{50}=18$ ，故至少需要志愿者 18 名.

故选：B

【点睛】

本题主要考查函数模型的简单应用，属于基础题.

10. 【2020 年新课标 3 卷理科】在一组样本数据中，1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 ，

且 $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$ ，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是（ ）

A. $p_1 = p_4 = 0.1, p_2 = p_3 = 0.4$

B. $p_1 = p_4 = 0.4, p_2 = p_3 = 0.1$

C. $p_1 = p_4 = 0.2, p_2 = p_3 = 0.3$

D. $p_1 = p_4 = 0.3, p_2 = p_3 = 0.2$

【答案】B

【解析】

【分析】

计算出四个选项中对应数据的平均数和方差，由此可得出标准差最大的一组.

【详解】

对于 A 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_A} = (1+4) \times 0.1 + (2+3) \times 0.4 = 2.5$ ，

方差为 $s_A^2 = (1-2.5)^2 \times 0.1 + (2-2.5)^2 \times 0.4 + (3-2.5)^2 \times 0.4 + (4-2.5)^2 \times 0.1 = 0.65$ ；

对于 B 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_B} = (1+4) \times 0.4 + (2+3) \times 0.1 = 2.5$ ，

方差为 $s_B^2 = (1-2.5)^2 \times 0.4 + (2-2.5)^2 \times 0.1 + (3-2.5)^2 \times 0.1 + (4-2.5)^2 \times 0.4 = 1.85$ ；

对于 C 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_C} = (1+4) \times 0.2 + (2+3) \times 0.3 = 2.5$ ，

方差为 $s_C^2 = (1-2.5)^2 \times 0.2 + (2-2.5)^2 \times 0.3 + (3-2.5)^2 \times 0.3 + (4-2.5)^2 \times 0.2 = 1.05$ ；

对于 D 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_D} = (1+4) \times 0.3 + (2+3) \times 0.2 = 2.5$ ，

方差为 $s_D^2 = (1-2.5)^2 \times 0.3 + (2-2.5)^2 \times 0.2 + (3-2.5)^2 \times 0.2 + (4-2.5)^2 \times 0.3 = 1.45$ 。

因此，B 选项这一组的标准差最大.

故选：B.

【点睛】

本题考查标准差的大小比较，考查方差公式的应用，考查计算能力，属于基础题.

11. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳，60% 的学生喜欢足球，82% 的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是（ ）

- A. 62% B. 56%
- C. 46% D. 42%

【答案】 C

【解析】

【分析】

记“该中学学生喜欢足球”为事件 A ，“该中学学生喜欢游泳”为事件 B ，则“该中学学生喜欢足球或游泳”为事件 $A+B$ ，“该中学学生既喜欢足球又喜欢游泳”为事件 $A \cdot B$ ，然后根据积事件的概率公式 $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B)$ 可得结果.

【详解】

记“该中学学生喜欢足球”为事件 A ，“该中学学生喜欢游泳”为事件 B ，则“该中学学生喜欢足球或游泳”为事件 $A+B$ ，“该中学学生既喜欢足球又喜欢游泳”为事件 $A \cdot B$ ，

则 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.82$, $P(A+B)=0.96$,

所以 $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A + B) = 0.6 + 0.82 - 0.96 = 0.46$

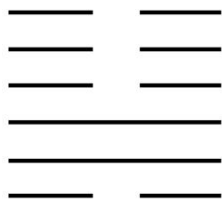
所以该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例为46%.

故选：C.

【点睛】

本题考查了积事件的概率公式，属于基础题.

12. 【2019 年新课标 1 卷理科】我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是



A. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{11}{32}$

C. $\frac{21}{32}$

D. $\frac{11}{16}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查利用两个计数原理与排列组合计算古典概型问题，渗透了传统文化、数学计算等数学素养，“重卦”中每一爻有两种情况，基本事件计算是住店问题，该重卦恰有 3 个阳爻是相同元素的排列问题，利用直接法即可计算。

【详解】

由题知，每一爻有 2 种情况，一重卦的 6 爻有 2^6 情况，其中 6 爻中恰有 3 个阳爻情况有 C_6^3 ，所以该重卦恰有 3 个阳爻的概率为 $\frac{C_6^3}{2^6} = \frac{5}{16}$ ，故选 A.

【点睛】

对利用排列组合计算古典概型问题，首先要分析元素是否可重复，其次要分析是排列问题还是组合问题. 本题是重复元素的排列问题，所以基本事件的计算是“住店”问题，满足条件事件的计算是相同元素的排列问题即为组合问题.

13. 【2019 年新课标 2 卷理科】演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 7 个有效评分. 7 个有效评分与 9 个原始评分相比，不变的数字特征是

A. 中位数

B. 平均数

C. 方差

D. 极差

【答案】A

【解析】

【分析】

可不用动笔，直接得到答案，亦可采用特殊数据，特值法筛选答案.

【详解】

设 9 位评委评分按从小到大排列为 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \cdots \leq x_8 \leq x_9$.

则①原始中位数为 x_5 ，去掉最低分 x_1 ，最高分 x_9 ，后剩余 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \cdots \leq x_8$ ，

中位数仍为 x_5 ， $\therefore$ A 正确.

②原始平均数 $\bar{x} = \frac{1}{9}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_8 + x_9)$ ，后来平均数 $\bar{x}' = \frac{1}{7}(x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_8)$

平均数受极端值影响较大， $\therefore \bar{x}$ 与 $\bar{x}'$ 不一定相同，B 不正确

$$\textcircled{3} S^2 = \frac{1}{9}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_9 - \bar{x})^2]$$

$$s'^2 = \frac{1}{7}[(x_2 - \bar{x}')^2 + (x_3 - \bar{x}')^2 + \cdots + (x_8 - \bar{x}')^2] \text{ 由 } \textcircled{2} \text{ 易知，C 不正确.}$$

④原极差 $= x_9 - x_1$ ，后来极差 $= x_8 - x_2$ 可能相等可能变小，D 不正确。

【点睛】

本题旨在考查学生对中位数、平均数、方差、极差本质的理解。

14. 【2019 年新课标 3 卷理科】《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著.某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为

A. 0.5 B. 0.6 C. 0.7 D. 0.8

【答案】C

【解析】

根据题先求出阅读过西游记的人数，进而得解。

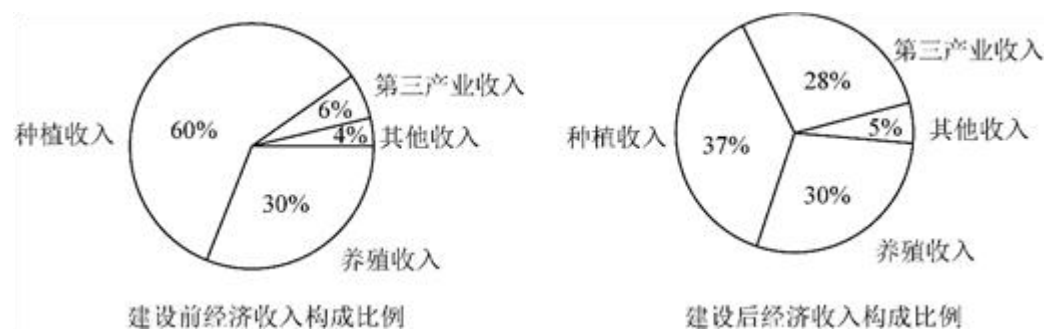
【详解】

由题意得，阅读过《西游记》的学生人数为 $90 - 80 + 60 = 70$ ，则其与该校学生人数之比为 $70 \div 100 = 0.7$ 。故选 C。

【点睛】

本题考查容斥原理，渗透了数据处理和数学运算素养。采取去重法，利用转化与化归思想解题。

15. 【2018 年新课标 1 卷理科】某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番。为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例。得到如下饼图：



则下面结论中不正确的是

- A. 新农村建设后，种植收入减少
- B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上
- C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍
- D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【答案】A

【解析】

【分析】

首先设出新农村建设前的经济收入为 M ，根据题意，得到新农村建设后的经济收入为 $2M$ ，之后从图中各项收入所占的比例，得到其对应的收入是多少，从而可以比较其大小，并且得到其相应的关系，从而得出正确的选项。

【详解】

设新农村建设前的收入为 M ，而新农村建设后的收入为 $2M$ ，

则新农村建设前种植收入为 $0.6M$ ，而新农村建设后的种植收入为 $0.74M$ ，所以种植收入增加了，所以 A 项不正确；

新农村建设前其他收入为 $0.04M$ ，新农村建设后其他收入为 $0.1M$ ，故增加了一倍以上，所以 B 项正确；

新农村建设前，养殖收入为 $0.3M$ ，新农村建设后为 $0.6M$ ，所以增加了一倍，所以 C 项正确；

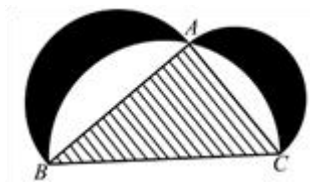
新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的综合占经济收入的 $30\% + 28\% = 58\% > 50\%$ ，所以超过了经济收入的一半，所以 D 正确；

故选 A.

点睛：该题考查的是有关新农村建设前后的经济收入的构成比例的饼形图，要会从图中读出相应的信息即可得结果。

16. 【2018 年新课标 1 卷理科】如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形．此图

由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC ，直角边 AB ， AC 。 $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I，黑色部分记为 II，其余部分记为 III。在整个图形中随机取一点，此点取自 I，II，III 的概率分别记为 p_1 ， p_2 ， p_3 ，则



A. $p_1=p_2$

B. $p_1=p_3$

C. $p_2=p_3$

D. $p_1=p_2+p_3$

【答案】A

【解析】

【分析】

首先设出直角三角形三条边的长度，根据其是直角三角形，从而得到三边的关系，然后应用相应的面积公式求得各个区域的面积，根据其数值大小，确定其关系，再利用面积型几何概型的概率公式确定出 p_1 ， p_2 ， p_3 的关系，从而求得结果.

【详解】

设 $AC=b, AB=c, BC=a$ ，则有 $b^2+c^2=a^2$ ，

从而可以求得 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_1=\frac{1}{2}bc$ ，

$$\begin{aligned} \text{黑色部分的面积为 } S_2 &= \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}bc\right] = \pi \left(\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{1}{2}bc \\ &= \pi \cdot \frac{c^2+b^2-a^2}{4} + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc, \end{aligned}$$

$$\text{其余部分的面积为 } S_3 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}bc = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{1}{2}bc, \text{ 所以有 } S_1 = S_2,$$

根据面积型几何概型的概率公式，可以得到 $p_1=p_2$ ，故选 A.

点睛：该题考查的是面积型几何概型的有关问题，题中需要解决的是概率的大小，根据面积型几何概型的概率公式，将比较概率的大小问题转化为比较区域的面积的大小，利用相关图形的面积公式求得结果.

17. 【2018 年新课标 2 卷理科】我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$. 在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是

A. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{1}{14}$

C. $\frac{1}{15}$

D. $\frac{1}{18}$

【答案】C

【解析】

【详解】

分析：先确定不超过 30 的素数，再确定两个不同的数的和等于 30 的取法，最后根据古典概型概率公式求概率.

详解：不超过 30 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 共 10 个，随机选取两个不同的数，共有 $C_{10}^2 = 45$ 种方法，因为 $7+23=11+19=13+17=30$ ，所以随机选取两个不同的数，其和等于 30 的有 3 种方法，故概率为 $\frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ ，选 C.

点睛：古典概型中基本事件数的探求方法：(1)列举法.(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.对于基本事件有“有序”与“无序”区别的题目，常采用树状图法.(3)列表法：适用于多元素基本事件的求解问题，通过列表把复杂的题目简单化、抽象的题目具体化.(4)排列组合法：适用于限制条件较多且元素数目较多的题目.

18. 【2018 年新课标 3 卷理科】某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p ，各成员的支付方式相互独立，设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数， $DX = 2.4$ ，

$P(X=4) < P(X=6)$ ，则 $p =$

A. 0.7

B. 0.6

C. 0.4

D. 0.3

【答案】B

【解析】

【详解】

分析：判断出为二项分布，利用公式 $D(X) = np(1-p)$ 进行计算即可.

$$\because D(X) = np(1-p)$$

$$\therefore p = 0.4 \text{ 或 } p = 0.6$$

$$\because P(X=4) = C_{10}^4 p^4 (1-p)^6 < P(X=6) = C_{10}^6 p^6 (1-p)^4,$$

$$\therefore (1-p)^2 < p^2, \text{ 可知 } p > 0.5$$

故答案选 B.

点睛：本题主要考查二项分布相关知识，属于中档题.

19. 【2021 年新高考 1 卷】有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，由这组数据得到新样本数据 $y_1,$

$y_2, \dots, y_n$ ，其中 $y_i = x_i + c (i = 1, 2, \dots, n), c$ 为非零常数，则 ()

- A. 两组样本数据的样本平均数相同
- B. 两组样本数据的样本中位数相同
- C. 两组样本数据的样本标准差相同
- D. 两组样本数据的样本极差相同

【答案】CD

【解析】

【分析】

A、C 利用两组数据的线性关系有 $E(y) = E(x) + c$ 、 $D(y) = D(x)$ ，即可判断正误；根据中位数、极差的定义，结合已知线性关系可判断 B、D 的正误.

【详解】

A: $E(y) = E(x + c) = E(x) + c$ 且 $c \neq 0$ ，故平均数不相同，错误；

B: 若第一组中位数为 x_i ，则第二组的中位数为 $y_i = x_i + c$ ，显然不相同，错误；

C: $D(y) = D(x) + D(c) = D(x)$ ，故方差相同，正确；

D: 由极差的定义知：若第一组的极差为 $x_{\max} - x_{\min}$ ，则第二组的极差为

$y_{\max} - y_{\min} = (x_{\max} + c) - (x_{\min} + c) = x_{\max} - x_{\min}$ ，故极差相同，正确；

故选：CD

20. 【2021 年新高考 2 卷】下列统计量中，能度量样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的离散程度的是 ()

- A. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差
- B. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的中位数
- C. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的极差
- D. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数

【答案】AC

【解析】

【分析】

考查所给的选项哪些是考查数据的离散程度，哪些是考查数据的集中趋势即可确定正确选项.

【详解】

由标准差的定义可知，标准差考查的是数据的离散程度；

由中位数的定义可知，中位数考查的是数据的集中趋势；

由极差的定义可知，极差考查的是数据的离散程度；

由平均数的定义可知，平均数考查的是数据的集中趋势；

故选：AC.

21. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, n$ ，且 $P(X=i)=p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ，定义 X 的信息熵

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad (\quad)$$

A. 若 $n=1$ ，则 $H(X)=0$

B. 若 $n=2$ ，则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

C. 若 $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ ，则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

D. 若 $n=2m$ ，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$ ，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j} (j=1, 2, \dots, m)$ ，

则 $H(X) \leq H(Y)$

【答案】AC

【解析】

【分析】

对于 A 选项，求得 $H(X)$ ，由此判断出 A 选项；对于 B 选项，利用特殊值法进行排除；对

于 C 选项，计算出 $H(X)$ ，利用对数函数的性质可判断出 C 选项；对于 D 选项，计算出

$H(X), H(Y)$ ，利用基本不等式和对数函数的性质判断出 D 选项.

【详解】

对于 A 选项，若 $n=1$ ，则 $i=1, p_1=1$ ，所以 $H(X) = -(1 \times \log_2 1) = 0$ ，所以 A 选项正确.

对于 B 选项，若 $n=2$ ，则 $i=1, 2$ ， $p_2=1-p_1$ ，

所以 $H(X) = -[p_1 \cdot \log_2 p_1 + (1-p_1) \cdot \log_2 (1-p_1)]$ ，

当 $p_1 = \frac{1}{4}$ 时， $H(X) = -\left(\frac{1}{4} \cdot \log_2 \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \log_2 \frac{3}{4}\right)$ ，

当 $p_1 = \frac{3}{4}$ 时， $H(X) = -\left(\frac{3}{4} \cdot \log_2 \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \frac{1}{4}\right)$ ，

两者相等，所以 B 选项错误.

对于 C 选项，若 $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ ，则

$$H(X) = -\left(\frac{1}{n} \cdot \log_2 \frac{1}{n}\right) \times n = -\log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n,$$

则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大，所以 C 选项正确.

对于 D 选项，若 $n = 2m$ ，随机变量 Y 的所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$ ，且 $P(Y = j) = p_j + p_{2m+1-j}$

($j = 1, 2, \dots, m$) .

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{2m} p_i \cdot \log_2 p_i = \sum_{i=1}^{2m} p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} \\ &= p_1 \cdot \log_2 \frac{1}{p_1} + p_2 \cdot \log_2 \frac{1}{p_2} + \dots + p_{2m-1} \cdot \log_2 \frac{1}{p_{2m-1}} + p_{2m} \cdot \log_2 \frac{1}{p_{2m}}. \\ H(Y) &= (p_1 + p_{2m}) \cdot \log_2 \frac{1}{p_1 + p_{2m}} + (p_2 + p_{2m-1}) \cdot \log_2 \frac{1}{p_2 + p_{2m-1}} + \dots + (p_m + p_{m+1}) \cdot \log_2 \frac{1}{p_m + p_{m+1}} \\ &= p_1 \cdot \log_2 \frac{1}{p_1 + p_{2m}} + p_2 \cdot \log_2 \frac{1}{p_2 + p_{2m-1}} + \dots + p_{2m-1} \cdot \log_2 \frac{1}{p_{2m-1} + p_2} + p_{2m} \cdot \log_2 \frac{1}{p_{2m} + p_1} \text{ 由于} \\ p_i > 0 (i=1, 2, \dots, 2m), \text{ 所以 } \frac{1}{p_i} &> \frac{1}{p_i + p_{2m+1-i}}, \text{ 所以 } \log_2 \frac{1}{p_i} > \log_2 \frac{1}{p_i + p_{2m+1-i}}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} > p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i + p_{2m+1-i}},$$

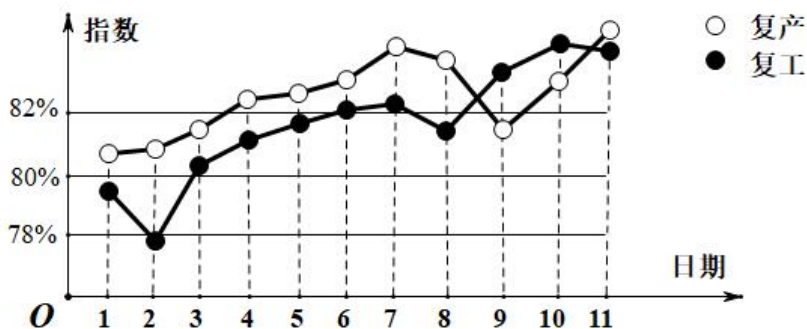
所以 $H(X) > H(Y)$ ，所以 D 选项错误.

故选：AC

【点睛】

本小题主要考查对新定义“信息熵”的理解和运用，考查分析、思考和解决问题的能力，涉及对数运算和对数函数及不等式的基本性质的运用，属于难题.

22. 【2020 年新高考 2 卷（海南卷）】我国新冠肺炎疫情进入常态化，各地有序推进复工复产，下面是某地连续 11 天复工复产指数折线图，下列说法正确的是



- A. 这 11 天复工指数和复产指数均逐日增加;
- B. 这 11 天期间, 复产指数增量大于复工指数的增量;
- C. 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%;
- D. 第 9 天至第 11 天复产指数增量大于复工指数的增量;

【答案】CD

【解析】

【分析】

注意到折线图中有递减部分, 可判定 A 错误; 注意考查第 1 天和第 11 天的复工复产指数的差的大小, 可判定 B 错误; 根据图象, 结合复工复产指数的意义和增量的意义可以判定 CD 正确.

【详解】

由图可知, 第 1 天到第 2 天复工指数减少, 第 7 天到第 8 天复工指数减少, 第 10 天到第 11 天复工指数减少, 第 8 天到第 9 天复产指数减少, 故 A 错误;

由图可知, 第一天的复产指标与复工指标的差大于第 11 天的复产指标与复工指标的差, 所以这 11 天期间, 复产指数增量小于复工指数的增量, 故 B 错误;

由图可知, 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%, 故 C 正确;

由图可知, 第 9 天至第 11 天复产指数增量大于复工指数的增量, 故 D 正确;

【点睛】

本题考查折线图表示的函数的认知与理解, 考查理解能力, 识图能力, 推理能力, 难点在于指数增量的理解与观测, 属中档题.

23. 【2022 年全国甲卷】从正方体的 8 个顶点中任选 4 个, 则这 4 个点在同一个平面的概率为_____.

【答案】 $\frac{6}{35}$.

【解析】

【分析】

根据古典概型的概率公式即可求出.

【详解】

从正方体的 8 个顶点中任取 4 个, 有 $n = C_8^4 = 70$ 个结果, 这 4 个点在同一个平面的有 $m =$

$6 + 6 = 12$ 个, 故所求概率 $P = \frac{m}{n} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}$.

故答案为： $\frac{6}{35}$.

24.【2022 年新高考 2 卷】已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ，且 $P(2 < X \leq 2.5) = 0.36$ ，则 $P(X > 2.5) =$ _____.

【答案】0.14## $\frac{7}{50}$.

【解析】

【分析】

根据正态分布曲线的性质即可解出.

【详解】

因为 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，所以 $P(X < 2) = P(X > 2) = 0.5$ ，因此 $P(X > 2.5) = P(X > 2) - P(2 < X \leq 2.5) = 0.5 - 0.36 = 0.14$.

故答案为：0.14.

25.【2019 年新课标 1 卷理科】甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）. 根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4:1 获胜的概率是_____.

【答案】0.18

【解析】

【分析】

本题应注意分情况讨论，即前五场甲队获胜的两种情况，应用独立事件的概率的计算公式求解. 题目有一定的难度，注重了基础知识、基本计算能力及分类讨论思想的考查.

【详解】

前四场中有一场客场输，第五场赢时，甲队以 4:1 获胜的概率是 $0.6^3 \times 0.5 \times 0.5 \times 2 = 0.108$,

前四场中有一场主场输，第五场赢时，甲队以 4:1 获胜的概率是 $0.4 \times 0.6^2 \times 0.5^2 \times 2 = 0.072$,

综上所述，甲队以 4:1 获胜的概率是 $q = 0.108 + 0.072 = 0.18$.

【点睛】

由于本题题干较长，所以，易错点之一就是能否静心读题，正确理解题意；易错点之二是思维的全面性是否具备，要考虑甲队以 4:1 获胜的两种情况；易错点之三是是否能够准确计算.

26.【2019 年新课标 2 卷理科】我国高铁发展迅速，技术先进. 经统计，在经停某站的高铁

列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.

【答案】0. 98.

【解析】

【分析】

本题考查通过统计数据进行概率的估计，采取估算法，利用概率思想解题.

【详解】

由题意得，经停该高铁站的列车正点数约为 $10 \times 0.97 + 20 \times 0.98 + 10 \times 0.99 = 39.2$ ，其中高铁个数为 $10 + 20 + 10 = 40$ ，所以该站所有高铁平均正点率约为 $\frac{39.2}{40} = 0.98$.

【点睛】

本题考点为概率统计，渗透了数据处理和数学运算素养. 侧重统计数据的概率估算，难度不大. 易忽视概率的估算值不是精确值而失误，根据分类抽样的统计数据，估算出正点列车数量与列车总数的比值.

