

专题 14 不等式

1. 【2022 年全国乙卷】若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 2, \\ x+2y \leq 4, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最大值是 ()

A. -2 B. 4 C. 8 D. 12

【答案】C

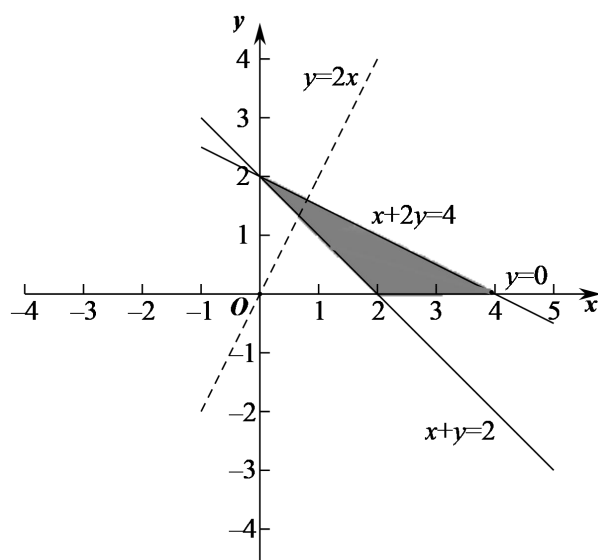
【解析】

【分析】

作出可行域，数形结合即可得解.

【详解】

由题意作出可行域，如图阴影部分所示，



转化目标函数 $z = 2x - y$ 为 $y = 2x - z$,

上下平移直线 $y = 2x - z$, 可得当直线过点 $(4, 0)$ 时, 直线截距最小, z 最大,

所以 $z_{\max} = 2 \times 4 - 0 = 8$.

故选: C.

2. 【2021 年乙卷文科】若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 4, \\ x-y \leq 2, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则 $z = 3x + y$ 的最小值为 ()

A. 18 B. 10 C. 6 D. 4

【答案】C

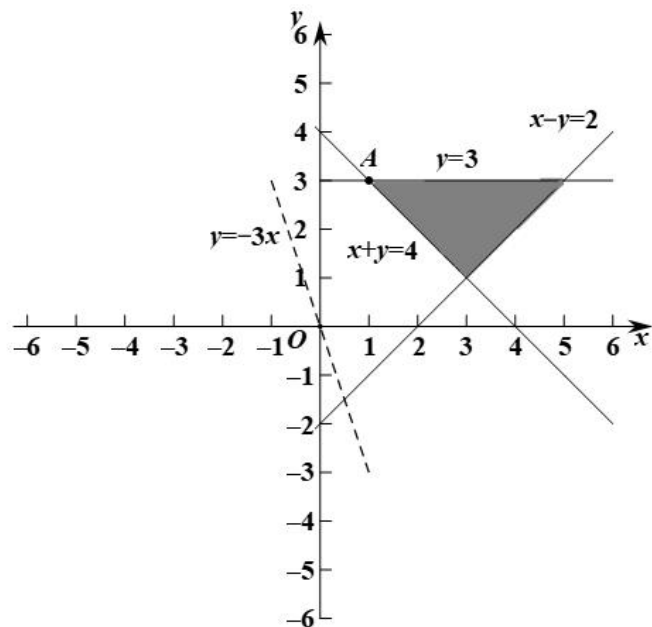
【解析】

【分析】

由题意作出可行域，变换目标函数为 $y = -3x + z$ ，数形结合即可得解.

【详解】

由题意，作出可行域，如图阴影部分所示，



由 $\begin{cases} x+y=4 \\ y=3 \end{cases}$ 可得点 $A(1,3)$,

转换目标函数 $z = 3x + y$ 为 $y = -3x + z$,

上下平移直线 $y = -3x + z$ ，数形结合可得当直线过点 A 时, z 取最小值，

此时 $z_{\min} = 3 \times 1 + 3 = 6$.

故选: C.

3. 【2021 年乙卷文科】下列函数中最小值为 4 的是 ()

A. $y = x^2 + 2x + 4$

B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$

C. $y = 2^x + 2^{2-x}$

D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据二次函数的性质可判断 A 选项不符合题意，再根据基本不等式“一正二定三相等”，即可得出 B, D 不符合题意，C 符合题意.

【详解】

对于 A, $y = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$, 当且仅当 $x = -1$ 时取等号, 所以其最小值为 3, A 不符合题意;

对于 B, 因为 $0 < |\sin x| \leq 1$, $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|} \geq 2\sqrt{4} = 4$, 当且仅当 $|\sin x| = 2$ 时取等号, 等号取不到, 所以其最小值不为 4, B 不符合题意;

对于 C, 因为函数定义域为 R , 而 $2^x > 0$, $y = 2^x + 2^{2-x} = 2^x + \frac{4}{2^x} \geq 2\sqrt{4} = 4$, 当且仅当 $2^x = 2$, 即 $x = 1$ 时取等号, 所以其最小值为 4, C 符合题意;

对于 D, $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$, 函数定义域为 $(0,1) \cup (1,+\infty)$, 而 $\ln x \in R$ 且 $\ln x \neq 0$, 如当 $\ln x = -1$, $y = -5$, D 不符合题意.

故选: C.

【点睛】

本题解题关键是理解基本不等式的使用条件, 明确“一正二定三相等”的意义, 再结合有关函数的性质即可解出.

4. 【2020 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, 则 ()

A. $f(x)$ 的最小值为 2

B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

【答案】D

【解析】

【分析】

根据基本不等式使用条件可判断 A; 根据奇偶性可判断 B; 根据对称性判断 C, D.

【详解】

$\because \sin x$ 可以为负, 所以 A 错;

$\because \sin x \neq 0 \therefore x \neq k\pi (k \in Z)$ $\because f(-x) = -\sin x - \frac{1}{\sin x} = -f(x) \therefore f(x)$ 关于原点对称;

$\because f(2\pi - x) = -\sin x - \frac{1}{\sin x} \neq f(x), f(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{\sin x} = f(x)$, 故 B 错;

$\therefore f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 C 错, D 对

故选: D

【点睛】

本题考查函数定义域与最值、奇偶性、对称性，考查基本分析判断能力，属中档题.

5. 【2019 年新课标 2 卷理科】若 $a > b$ ，则

A. $\ln(a-b) > 0$

B. $3a < 3b$

C. $a^3 - b^3 > 0$

D. $|a| > |b|$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题也可用直接法，因为 $a > b$ ，所以 $a - b > 0$ ，当 $a - b = 1$ 时， $\ln(a - b) = 0$ ，知 A 错，因为

$y = 3^x$ 是增函数，所以 $3^a > 3^b$ ，故 B 错；因为幂函数 $y = x^3$ 是增函数， $a > b$ ，所以 $a^3 > b^3$ ，

知 C 正确；取 $a = 1, b = -2$ ，满足 $a > b$ ， $1 = |a| < |b| = 2$ ，知 D 错.

【详解】

取 $a = 2, b = 1$ ，满足 $a > b$ ， $\ln(a - b) = 0$ ，知 A 错，排除 A；因为 $9 = 3^a > 3^b = 3$ ，知 B 错，

排除 B；取 $a = 1, b = -2$ ，满足 $a > b$ ， $1 = |a| < |b| = 2$ ，知 D 错，排除 D，因为幂函数 $y = x^3$ 是

增函数， $a > b$ ，所以 $a^3 > b^3$ ，故选 C.

【点睛】

本题主要考查对数函数性质、指数函数性质、幂函数性质及绝对值意义，渗透了逻辑推理和运算能力素养，利用特殊值排除即可判断.

6. 【2022 年新高考 2 卷】若 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$ ，则 ()

A. $x + y \leq 1$

B. $x + y \geq -2$

C. $x^2 + y^2 \leq 2$

D. $x^2 + y^2 \geq 1$

【答案】BC

【解析】

【分析】

根据基本不等式或者取特值即可判断各选项的真假.

【详解】

因为 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，由 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 可变形为， $(x + y)^2 - 1 = 3xy \leq$

$3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ，解得 $-2 \leq x + y \leq 2$ ，当且仅当 $x = y = -1$ 时， $x + y = -2$ ，当且仅当 $x = y = 1$

时， $x + y = 2$ ，所以 A 错误，B 正确；

由 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 可变形为 $(x^2 + y^2) - 1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, 解得 $x^2 + y^2 \leq 2$, 当且仅当 $x = y = \pm 1$ 时取等号, 所以 C 正确;

因为 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 变形可得 $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$, 设 $x - \frac{y}{2} = \cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin\theta$, 所以 $x = \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta, y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$, 因此 $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \frac{5}{3}\sin^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta - \frac{1}{3}\cos 2\theta + \frac{1}{3}$

$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$, 所以当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时满足等式, 但是 $x^2 + y^2 \geq 1$ 不成立, 所以 D 错误.

故选: BC.

7. 【2020 年新高考 1 卷 (山东卷)】已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()

A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$

C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$

D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

根据 $a + b = 1$, 结合基本不等式及二次函数知识进行求解.

【详解】

对于 A, $a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 A 正确;

对于 B, $a - b = 2a - 1 > -1$, 所以 $2^{a-b} > 2^{-1} = \frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab \leq \log_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 C 不正确;

对于 D, 因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + a + b = 2$,

所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 D 正确;

故选: ABD

【点睛】

本题主要考查不等式的性质，综合了基本不等式，指数函数及对数函数的单调性，侧重考查数学运算的核心素养.

8. 【2020 年新课标 1 卷理科】若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y-2 \leq 0, \\ x-y-1 \geq 0, \\ y+1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值为____.

【答案】1

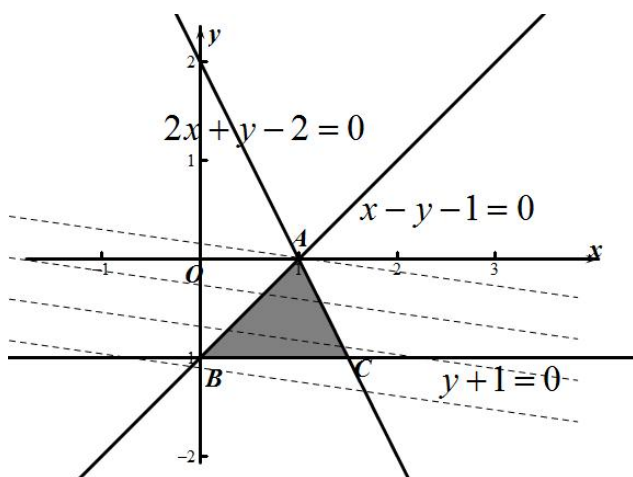
【解析】

【分析】

首先画出可行域，然后结合目标函数的几何意义即可求得其最大值.

【详解】

绘制不等式组表示的平面区域如图所示，



目标函数 $z = x + 7y$ 即: $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$,

其中 z 取得最大值时，其几何意义表示直线系在 y 轴上的截距最大，

据此结合目标函数的几何意义可知目标函数在点 A 处取得最大值，

联立直线方程: $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ ，可得点 A 的坐标为: $A(1, 0)$,

据此可知目标函数的最大值为: $z_{\max} = 1 + 7 \times 0 = 1$.

故答案为: 1.

【点睛】

求线性目标函数 $z=ax+by(ab\neq 0)$ 的最值，当 $b>0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时， z 值最大，在 y 轴截距最小时， z 值最小；当 $b<0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时， z 值最小，在 y 轴上截距最小时， z 值最大.

9. 【2020 年新课标 2 卷文科】若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq -1, \\ x-y\geq -1, \\ 2x-y\leq 1, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是_____.

【答案】8

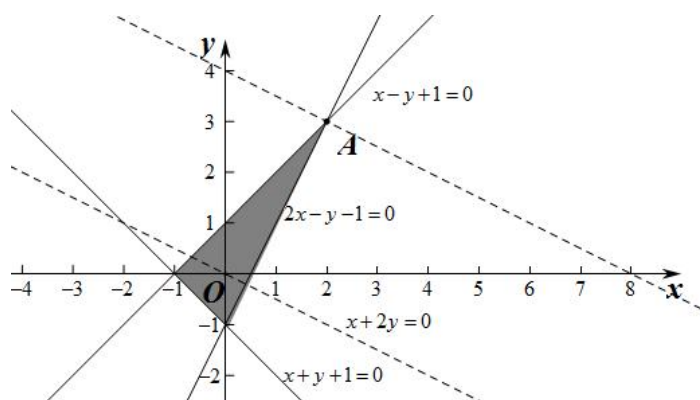
【解析】

【分析】

在平面直角坐标系内画出不等式组表示的平面区域，然后平移直线 $y=-\frac{1}{2}x$ ，在平面区域内找到一点使得直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 在纵轴上的截距最大，求出点的坐标代入目标函数中即可.

【详解】

不等式组表示的平面区域为下图所示：



平移直线 $y=-\frac{1}{2}x$ ，当直线经过点 A 时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 在纵轴上的截距最大，

此时点 A 的坐标是方程组 $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 的解，解得： $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ，

因此 $z=x+2y$ 的最大值为： $2+2\times 3=8$.

故答案为：8.

【点睛】

本题考查了线性规划的应用，考查了数形结合思想，考查数学运算能力.

10. 【2020 年新课标 3 卷理科】若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ 2x-y \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_

_____.

【答案】7

【解析】

【分析】

作出可行域，利用截距的几何意义解决.

【详解】

不等式组所表示的可行域如图

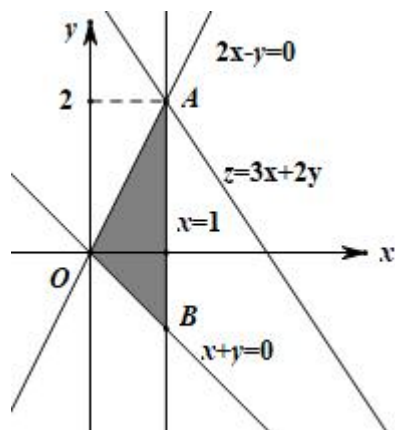
因为 $z=3x+2y$, 所以 $y=-\frac{3x}{2}+\frac{z}{2}$, 易知截距 $\frac{z}{2}$ 越大, 则 z 越大,

平移直线 $y=-\frac{3x}{2}$, 当 $y=-\frac{3x}{2}+\frac{z}{2}$ 经过 A 点时截距最大, 此时 z 最大,

由 $\begin{cases} y=2x \\ x=1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, $A(1,2)$,

所以 $z_{\max}=3 \times 1+2 \times 2=7$.

故答案为: 7.



【点睛】

本题主要考查简单线性规划的应用, 涉及到求线性目标函数的最大值, 考查学生数形结合的思想, 是一道容易题.

11. 【2020 年新课标 3 卷理科】关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题:

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

② $f(x)$ 的图象关于原点对称.

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

【答案】②③

【解析】

【分析】

利用特殊值法可判断命题①的正误; 利用函数奇偶性的定义可判断命题②的正误; 利用对称性的定义可判断命题③的正误; 取 $-\pi < x < 0$ 可判断命题④的正误. 综合可得出结论.

【详解】

对于命题①, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,

所以, 函数 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称, 命题①错误;

对于命题②, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, 定义域关于原点对称,

$$f(-x)=\sin(-x)+\frac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\frac{1}{\sin x}=-\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=-f(x),$$

所以, 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 命题②正确;

对于命题③, $\because f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cos x+\frac{1}{\cos x}, \text{ 则 } f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

所以, 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称, 命题③正确;

对于命题④, 当 $-\pi < x < 0$ 时, $\sin x < 0$, 则 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x} < 0 < 2$,

命题④错误.

故答案为: ②③.

【点睛】

本题考查正弦型函数的奇偶性、对称性以及最值的求解, 考查推理能力与计算能力, 属于中等题.

12. 【2019 年新课标 2 卷文科】若变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x+3y-6 \geq 0, \\ x+y-3 \leq 0, \\ y-2 \leq 0, \end{cases}$$
 则 $z=3x-y$ 的最大

值是_____.

【答案】9.

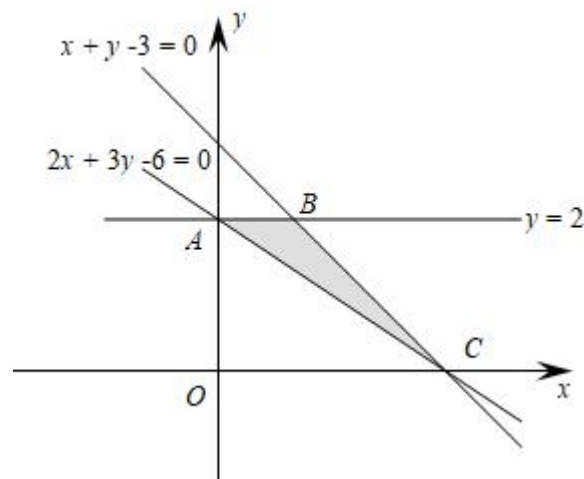
【解析】

【分析】

作出可行域，平移 $3x-y=0$ 找到目标函数取到最大值的点，求出点的坐标，代入目标函数可得.

【详解】

画出不等式组表示的可行域，如图所示，



阴影部分表示的三角形 ABC 区域，根据直线 $3x-y-z=0$ 中的 z 表示纵截距的相反数，当直线 $z=3x-y$ 过点 $C(3,0)$ 时， z 取最大值为 9.

【点睛】

本题考查线性规划中最大值问题，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养. 采取图解法，利用数形结合思想解题. 搞不清楚线性目标函数的几何意义致误，从线性目标函数对应直线的截距观察可行域，平移直线进行判断取最大值还是最小值.

13. 【2018 年新课标 1 卷理科】若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$
，则 $z=3x+2y$ 的最大

值为_____.

【答案】6

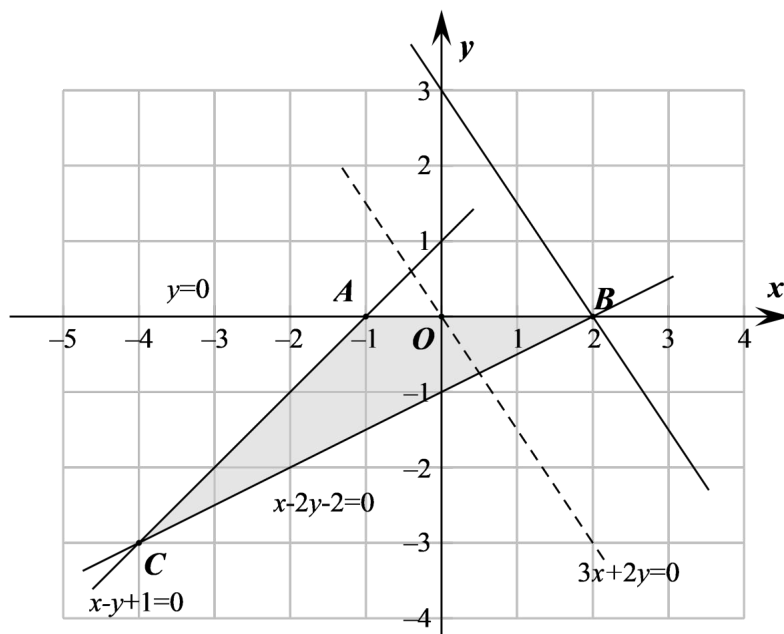
【解析】

【分析】

首先根据题中所给的约束条件，画出相应的可行域，再将目标函数化成斜截式 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$ ，之后在图中画出直线 $y = -\frac{3}{2}x$ ，在上下移动的过程中，结合 $\frac{1}{2}z$ 的几何意义，可以发现直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$ 过 B 点时取得最大值，联立方程组，求得点 B 的坐标代入目标函数解析式，求得最大值。

【详解】

根据题中所给的约束条件，画出其对应的可行域，如图所示：



由 $z = 3x + 2y$ ，可得 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$ ，

画出直线 $y = -\frac{3}{2}x$ ，将其上下移动，

结合 $\frac{z}{2}$ 的几何意义，可知当直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$ 在 y 轴截距最大时，z 取得最大值，

由 $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ，解得 $B(2, 0)$ ，

此时 $z_{\max} = 3 \times 2 + 0 = 6$ ，故答案为 6。

点睛：该题考查的是有关线性规划的问题，在求解的过程中，首先需要正确画出约束条件对应的可行域，之后根据目标函数的形式，判断 z 的几何意义，之后画出一条直线，上下平移，

判断哪个点是最优解，从而联立方程组，求得最优解的坐标，代入求值，要明确目标函数的形式大体上有三种：斜率型、截距型、距离型；根据不同的形式，应用相应的方法求解.

14. 【2018 年新课标 2 卷理科】若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x+2y-5 \geq 0, \\ x-2y+3 \geq 0, \\ x-5 \leq 0, \end{cases}$$
 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

【答案】9

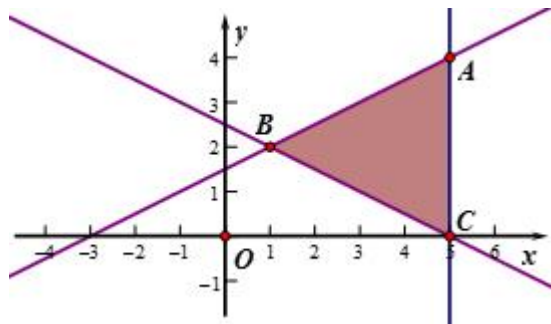
【解析】

【分析】

作出可行域，根据目标函数的几何意义可知当 $x=5, y=4$ 时， $z_{\max}=9$.

【详解】

不等式组表示的可行域是以 $A(5,4), B(1,2), C(5,0)$ 为顶点的三角形区域，如下图所示，目标函数 $z=x+y$ 的最大值必在顶点处取得，易知当 $x=5, y=4$ 时， $z_{\max}=9$.



【点睛】

线性规划问题是高考中常考考点，主要以选择及填空的形式出现，基本题型为给出约束条件求目标函数的最值，主要结合方式有：截距型、斜率型、距离型等.

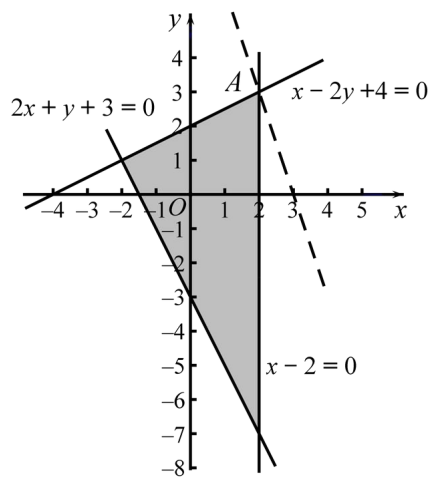
15. 【2018 年新课标 3 卷文科】若变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x+y+3 \geq 0, \\ x-2y+4 \geq 0, \\ x-2 \leq 0. \end{cases}$$
 则 $z=x+\frac{1}{3}y$ 的最大值是_____.

【答案】3

【解析】

【详解】

作出可行域



平移直线 $z = x + \frac{1}{3}y$,

由图可知目标函数在直线 $x - 2y + 4 = 0$ 与 $x = 2$ 的交点 $A(2, 3)$ 处取得最大值 3

故答案为 3.

点睛：本题考查线性规划的简单应用，属于基础题.

