

专题 13 数列（解答题）

1. 【2022 年全国甲卷】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) -78.

【解析】

【分析】

(1) 依题意可得 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$, 根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$, 作差即可得到 $a_n - a_{n-1} = 1$, 从而得证;

(2) 由 (1) 及等比中项的性质求出 a_1 , 即可得到 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和, 再根据二次函数的性质计算可得.

(1)

解: 因为 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 即 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1)$ ②,

①-②得, $2S_n + n^2 - 2S_{n-1} - (n-1)^2 = 2na_n + n - 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)$,

即 $2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1$,

即 $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1)$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 1$, $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

(2)

解: 由 (1) 可得 $a_4 = a_1 + 3$, $a_7 = a_1 + 6$, $a_9 = a_1 + 8$,

又 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 所以 $a_7^2 = a_4 \cdot a_9$,

即 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3) \cdot (a_1 + 8)$, 解得 $a_1 = -12$,

所以 $a_n = n - 13$, 所以 $S_n = -12n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{25}{2}n = \frac{1}{2}\left(n - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{625}{8}$,

所以, 当 $n = 12$ 或 $n = 13$ 时 $(S_n)_{\min} = -78$.

2. 【2022 年新高考 1 卷】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1, \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

【答案】(1) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2)见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用等差数列的通项公式求得 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}$, 得到 $S_n = \frac{(n+2)a_n}{3}$, 利用和与项的关系得到当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$, 进而得: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$, 利用累乘法求得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 检验对于 $n=1$ 也成立, 得到 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(2) 由 (1) 的结论, 利用裂项求和法得到 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$, 进而证得.

(1)

$$\because a_1 = 1, \therefore S_1 = a_1 = 1, \therefore \frac{S_1}{a_1} = 1,$$

又 $\because \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列,

$$\therefore \frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \therefore S_n = \frac{(n+2)a_n}{3},$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

整理得: $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$,

$$\text{即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$= 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2},$$

显然对于 $n=1$ 也成立,

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

(2)

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2$$

3.【2022 年新高考 2 卷】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = b_4 - a_4$.

(1)证明: $a_1 = b_1$;

(2)求集合 $\{k|b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中元素个数.

【答案】(1)证明见解析;

(2)9.

【解析】

【分析】

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据题意列出方程组即可证出;

(2) 根据题意化简可得 $m = 2^{k-2}$, 即可解出.

(1)

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 所以, $\begin{cases} a_1 + d - 2b_1 = a_1 + 2d - 4b_1 \\ a_1 + d - 2b_1 = 8b_1 - (a_1 + 3d) \end{cases}$, 即可解得, $b_1 = a_1 = \frac{d}{2}$,

所以原命题得证.

(2)

由(1)知, $b_1 = a_1 = \frac{d}{2}$, 所以 $b_k = a_m + a_1 \Leftrightarrow b_1 \times 2^{k-1} = a_1 + (m-1)d + a_1$, 即 $2^{k-1} = 2m$,

亦即 $m = 2^{k-2} \in [1, 500]$, 解得 $2 \leq k \leq 10$, 所以满足等式的解 $k = 2, 3, 4, \dots, 10$, 故集合

$\{k|b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中的元素个数为 $10 - 2 + 1 = 9$.

4.【2021 年甲卷文科】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0, a_2 = 3a_1$, 且数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

【答案】证明见解析.

【解析】

【分析】

先根据 $\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}$ 求出数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差 d , 进一步写出 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的通项, 从而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 最终得证.

【详解】

$\because$ 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 设公差为 $d = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_2 + a_1} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}$

$\therefore \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)\sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1}, (n \in \mathbf{N}^*)$

$$\therefore S_n = a_1 n^2, (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = a_1 n^2 - a_1 (n-1)^2 = 2a_1 n - a_1$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } 2a_1 \times 1 - a_1 = a_1, \text{ 满足 } a_n = 2a_1 n - a_1,$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2a_1 n - a_1, (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = (2a_1 n - a_1) - [2a_1 (n-1) - a_1] = 2a_1$$

$\therefore \{a_n\}$ 是等差数列.

【点睛】

在利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求通项公式时一定要讨论 $n = 1$ 的特殊情况.

5. 【2021 年甲卷理科】已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

【答案】证明过程见解析

【解析】

【分析】

选①②作条件证明③时, 可设出 $\sqrt{S_n}$, 结合 a_n, S_n 的关系求出 a_n , 利用 $\{a_n\}$ 是等差数列可证

$a_2 = 3a_1$; 也可分别设出公差, 写出各自的通项公式后利用两者的关系, 对照系数, 得到等量关系, 进行证明.

选①③作条件证明②时, 根据等差数列的求和公式表示出 $\sqrt{S_n}$, 结合等差数列定义可证;

选②③作条件证明①时, 设出 $\sqrt{S_n} = an + b$, 结合 a_n, S_n 的关系求出 a_n , 根据 $a_2 = 3a_1$ 可求 b , 然后可证 $\{a_n\}$ 是等差数列; 也可利用前两项的差求出公差, 然后求出通项公式, 进而证明出结论.

【详解】

选①②作条件证明③:

[方法一]: 待定系数法+ a_n 与 S_n 关系式

设 $\sqrt{S_n} = an + b (a > 0)$, 则 $S_n = (an + b)^2$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = (a + b)^2$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (an + b)^2 - (an - a + b)^2 = a(2an - a + 2b)$;

因为 $\{a_n\}$ 也是等差数列, 所以 $(a + b)^2 = a(2a - a + 2b)$, 解得 $b = 0$;

所以 $a_n = a^2(2n - 1)$, $a_1 = a^2$, 故 $a_2 = 3a^2 = 3a_1$.

[方法二] : 待定系数法

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等差数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差为 d_1 ,

则 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n - 1)d_1$, 将 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 代入 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n - 1)d_1$,

化简得 $\frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = d_1^2n^2 + (2\sqrt{a_1}d_1 - 2d_1^2)n + (\sqrt{a_1} - d_1)^2$ 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立.

则有
$$\begin{cases} d = 2d_1^2, \\ 2a_1 - d = 4\sqrt{a_1}d_1 - 4d_1^2, \\ \sqrt{a_1} - d_1 = 0, \end{cases}$$
 解得 $d_1 = \sqrt{a_1}$, $d = 2a_1$. 所以 $a_2 = 3a_1$.

选①③作条件证明②:

因为 $a_2 = 3a_1$, $\{a_n\}$ 是等差数列,

所以公差 $d = a_2 - a_1 = 2a_1$,

所以 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2a_1$, 即 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1}n$,

因为 $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1}(n+1) - \sqrt{a_1}n = \sqrt{a_1}$,

所以 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

选②③作条件证明①:

[方法一]: 定义法

设 $\sqrt{S_n} = an + b (a > 0)$, 则 $S_n = (an + b)^2$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = (a + b)^2$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (an + b)^2 - (an - a + b)^2 = a(2an - a + 2b)$;

因为 $a_2 = 3a_1$ ，所以 $a(3a+2b) = 3(a+b)^2$ ，解得 $b = 0$ 或 $b = -\frac{4a}{3}$ ；

当 $b = 0$ 时， $a_1 = a^2, a_n = a^2(2n-1)$ ，当 $n \geq 2$ 时， $a_n - a_{n-1} = 2a^2$ 满足等差数列的定义，此时 $\{a_n\}$ 为等差数列；

当 $b = -\frac{4a}{3}$ 时， $\sqrt{S_n} = an + b = an - \frac{4}{3}a$ ， $\sqrt{S_1} = -\frac{a}{3} < 0$ 不合题意，舍去。

综上所述 $\{a_n\}$ 为等差数列。

【方法二】【最优解】：求解通项公式

因为 $a_2 = 3a_1$ ，所以 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}$ ， $\sqrt{S_2} = \sqrt{a_1 + a_2} = 2\sqrt{a_1}$ ，因为 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也为等差数列，所以公差

$d_1 = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}$ ，所以 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)d_1 = n\sqrt{a_1}$ ，故 $S_n = n^2 a_1$ ，当 $n \geq 2$ 时，

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 a_1 - (n-1)^2 a_1 = (2n-1)a_1$ ，当 $n=1$ 时，满足上式，故 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n = (2n-1)a_1$ ，所以 $a_{n-1} = (2n-3)a_1$ ， $a_n - a_{n-1} = 2a_1$ ，符合题意。

【整体点评】

这类题型在解答题中较为罕见，求解的关键是牢牢抓住已知条件，结合相关公式，逐步推演，选①②时，法一：利用等差数列的通项公式是关于 n 的一次函数，直接设出

$\sqrt{S_n} = an + b (a > 0)$ ，平方后得到 S_n 的关系式，利用 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 得到 $\{a_n\}$ 的通项公式，

进而得到 $a_2 = 3a_1$ ，是选择①②证明③的通式通法；法二：分别设出 $\{a_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 的公差，写出各自的通项公式后利用两者的关系，对照系数，得到等量关系 $d_1 = \sqrt{a_1}$ ， $d = 2a_1$ ，进而得

到 $a_2 = 3a_1$ ；选①③时，按照正常的思维求出公差，表示出 S_n 及 $\sqrt{S_n}$ ，进而由等差数列定义

进行证明；选②③时，法一：利用等差数列的通项公式是关于 n 的一次函数，直接设出

$\sqrt{S_n} = an + b (a > 0)$ ，结合 a_n, S_n 的关系求出 a_n ，根据 $a_2 = 3a_1$ 可求 b ，然后可证 $\{a_n\}$ 是等差数

列；法二：利用 $\sqrt{S_n}$ 是等差数列即前两项的差 $d_1 = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}$ 求出公差，然后求出 $\sqrt{S_n}$

的通项公式，利用 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，求出 $\{a_n\}$ 的通项公式，进而证明出结论。

6. 【2021 年乙卷文科】设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$ 。已知 $a_1, 3a_2,$

$9a_3$ 成等差数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明: $T_n < \frac{S_n}{2}$.

【答案】(1) $a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$, $b_n = \frac{n}{3^n}$; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 利用等差数列的性质及 a_1 得到 $9q^2 - 6q + 1 = 0$, 解方程即可;

(2) 利用公式法、错位相减法分别求出 S_n, T_n , 再作差比较即可.

【详解】

(1) 因为 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列且 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列,

所以 $6a_2 = a_1 + 9a_3$, 所以 $6a_1q = a_1 + 9a_1q^2$,

即 $9q^2 - 6q + 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{3}$, 所以 $a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$,

所以 $b_n = \frac{na_n}{3} = \frac{n}{3^n}$.

(2) [方法一]: 作差后利用错位相减法求和

$$T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n},$$

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right),$$

$$T_n - \frac{S_n}{2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) = \frac{0 - \frac{1}{2}}{3^0} + \frac{1 - \frac{1}{2}}{3^1} + \frac{2 - \frac{1}{2}}{3^2} + \cdots +$$

$$\frac{n-1 - \frac{1}{2}}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}.$$

$$\text{设 } \Gamma_n = \frac{0 - \frac{1}{2}}{3^0} + \frac{1 - \frac{1}{2}}{3^1} + \frac{2 - \frac{1}{2}}{3^2} + \cdots + \frac{n-1 - \frac{1}{2}}{3^{n-1}}, \quad \textcircled{8}$$

$$\text{则 } \frac{1}{3} \Gamma_n = \frac{0 - \frac{1}{2}}{3^1} + \frac{1 - \frac{1}{2}}{3^2} + \frac{2 - \frac{1}{2}}{3^3} + \cdots + \frac{n-1 - \frac{1}{2}}{3^n}. \quad \textcircled{9}$$

$$\text{由 } \textcircled{8} - \textcircled{9} \text{ 得 } \frac{2}{3} \Gamma_n = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{n - \frac{3}{2}}{3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n - \frac{3}{2}}{3^n}.$$

所以 $\Gamma_n = -\frac{1}{4 \times 3^{n-2}} - \frac{n-\frac{3}{2}}{2 \times 3^{n-1}} = -\frac{n}{2 \times 3^{n-1}}$.

因此 $T_n - \frac{S_n}{2} = \frac{n}{3^n} - \frac{n}{2 \times 3^{n-1}} = -\frac{n}{2 \times 3^n} < 0$.

故 $T_n < \frac{S_n}{2}$.

[方法二] 【最优解】：公式法和错位相减求和法

证明：由 (1) 可得 $S_n = \frac{1 \times (1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} (1 - \frac{1}{3^n})$,

$$T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ 得 } \frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} (1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{n}{3^{n+1}},$$

所以 $T_n = \frac{3}{4} (1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{n}{2 \cdot 3^n}$,

所以 $T_n - \frac{S_n}{2} = \frac{3}{4} (1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{n}{2 \cdot 3^n} - \frac{3}{4} (1 - \frac{1}{3^n}) = -\frac{n}{2 \cdot 3^n} < 0$,

所以 $T_n < \frac{S_n}{2}$.

[方法三]：构造裂项法

由 (I) 知 $b_n = n \left(\frac{1}{3} \right)^n$, 令 $c_n = (\alpha n + \beta) \left(\frac{1}{3} \right)^n$, 且 $b_n = c_n - c_{n+1}$, 即

$$n \left(\frac{1}{3} \right)^n = (\alpha n + \beta) \left(\frac{1}{3} \right)^n - [\alpha(n+1) + \beta] \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1},$$

通过等式左右两边系数比对易得 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{3}{4}$, 所以 $c_n = \left(\frac{3}{2}n + \frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n$.

则 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = c_1 - c_{n+1} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^n$, 下同方法二.

[方法四]：导函数法

设 $f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$,

$$\text{由于} \left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = \frac{[x(1-x^n)]'(1-x) - [x(1-x^n)] \times (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2},$$

$$\text{则 } f'(x) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

$$\text{又 } b_n = n \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \frac{1}{3} \left[1 + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right] =$$

$$\frac{1}{3} \cdot f' \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1 + n \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{1}{3} \right)^n}{\left(1 - \frac{1}{3} \right)^2}$$

$$= \frac{3}{4} \left[1 + n \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^n, \text{ 下同方法二.}$$

【整体点评】

本题主要考查数列的求和，涉及到等差数列的性质，错位相减法求数列的和，考查学生的数学运算能力，是一道中档题，其中证明不等式时采用作差法，或者作商法要根据式子得结构类型灵活选择，关键是要看如何消项化简的更为简洁.

(2) 的方法一直接作差后利用错位相减法求其部分和，进而证得结论；

方法二根据数列的不同特点，分别利用公式法和错位相减法求得 S_n, T_n ，然后证得结论，为最优解；

方法三采用构造数列裂项求和的方法，关键是构造 $c_n = (\alpha n + \beta) \left(\frac{1}{3} \right)^n$ ，使 $b_n = c_n - c_{n+1}$ ，求得 T_n 的表达式，这是错位相减法的一种替代方法，

方法四利用导数方法求和，也是代替错位相减求和法的一种方法.

7. 【2021 年乙卷理科】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，已知

$$\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2.$$

(1) 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$.

【解析】

【分析】

(1) 由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得 $S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1}$, 且 $b_n \neq 0$, 取 $n=1$, 得 $b_1 = \frac{3}{2}$, 由题意得

$\frac{2b_1}{2b_1 - 1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2 - 1} \cdots \frac{2b_n}{2b_n - 1} = b_n$, 消积得到项的递推关系 $\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1} - 1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 进而证明数列 $\{b_n\}$ 是等差

数列;

(2) 由 (1) 可得 b_n 的表达式, 由此得到 S_n 的表达式, 然后利用和与项的关系求得

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$$

【详解】

(1) [方法一]:

由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得 $S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1}$, 且 $b_n \neq 0$, $b_n \neq \frac{1}{2}$,

取 $n=1$, 由 $S_1 = b_1$ 得 $b_1 = \frac{3}{2}$,

由于 b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,

所以 $\frac{2b_1}{2b_1 - 1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2 - 1} \cdots \frac{2b_n}{2b_n - 1} = b_n$,

所以 $\frac{2b_1}{2b_1 - 1} \cdot \frac{2b_2}{2b_2 - 1} \cdots \frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1} - 1} = b_{n+1}$,

所以 $\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1} - 1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$,

由于 $b_{n+1} \neq 0$

所以 $\frac{2}{2b_{n+1} - 1} = \frac{1}{b_n}$, 即 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$, 其中 $n \in N^*$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = \frac{3}{2}$ 为首项, 以 $d = \frac{1}{2}$ 为公差等差数列;

[方法二] 【最优解】:

由已知条件知 $b_n = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdots S_{n-1} \cdot S_n$ ①

于是 $b_{n-1} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdots S_{n-1} (n \geq 2)$. ②

由①②得 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = S_n$. ③

又 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, ④

由③④得 $b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}$.

令 $n=1$, 由 $S_1 = b_1$, 得 $b_1 = \frac{3}{2}$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

[方法三]:

由 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 得 $b_n = \frac{S_n}{2S_n - 2}$, 且 $S_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, $S_n \neq 1$.

又因为 $b_n = S_n \cdot S_{n-1} \cdots S_1 = S_n \cdot b_{n-1}$, 所以 $b_{n-1} = \frac{b_n}{S_n} = \frac{1}{2S_n - 2}$, 所以

$$b_n - b_{n-1} = \frac{S_n}{2S_n - 2} - \frac{1}{2S_n - 2} = \frac{S_n - 1}{2(S_n - 1)} = \frac{1}{2} (n \geq 2).$$

在 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 中, 当 $n=1$ 时, $b_1 = S_1 = \frac{3}{2}$.

故数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

[方法四]: 数学归纳法

由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 得 $S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1}$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = 2$, $b_3 = \frac{5}{2}$, 猜想数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项,

$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列, 且 $b_n = \frac{1}{2}n + 1$.

下面用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时显然成立.

假设当 $n=k$ 时成立, 即 $b_k = \frac{1}{2}k + 1, S_k = \frac{k+2}{k+1}$.

那么当 $n=k+1$ 时, $b_{k+1} = b_k S_{k+1} = \left(\frac{1}{2}k + 1\right) \cdot \frac{k+3}{k+2} = \frac{k+3}{2} = \frac{1}{2}(k+1) + 1$.

综上, 猜想对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 都成立.

即数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

(2)

由 (1) 可得, 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = \frac{3}{2}$ 为首项, 以 $d = \frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,

$$\therefore b_n = \frac{3}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2},$$

$$S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1} = \frac{2+n}{1+n},$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2+n}{1+n} - \frac{1+n}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, 显然对于 $n=1$ 不成立,

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}.$$

【整体点评】

(1) 方法一从 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得 $S_n = \frac{2b_n}{2b_n - 1}$, 然后利用 b_n 的定义, 得到数列 $\{b_n\}$ 的递推关系,

进而替换相除消项得到相邻两项的关系, 从而证得结论;

方法二先从 b_n 的定义, 替换相除得到 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = S_n$, 再结合 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得到 $b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}$, 从而证得结论, 为最优解;

方法三由 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 得 $b_n = \frac{S_n}{2S_n - 2}$, 由 b_n 的定义得 $b_{n-1} = \frac{b_n}{S_n} = \frac{1}{2S_n - 2}$, 进而作差证得结论;

方法四利用归纳猜想得到数列 $b_n = \frac{1}{2}n + 1$, 然后利用数学归纳法证得结论.

(2) 由 (1) 的结论得到 $b_n = \frac{1}{2}n + 1$, 求得 S_n 的表达式, 然后利用和与项的关系求得 $\{a_n\}$ 的通项公式;

8. 【2021 年新高考 1 卷】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数}, \\ a_n + 2, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(1) 记 $b_n = a_{2n}$, 写出 b_1, b_2 , 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

【答案】(1) $b_1 = 2, b_2 = 5, b_n = 3n - 1$; (2) 300.

【解析】

【分析】

(1) 方法一: 由题意结合递推关系式确定数列 $\{b_n\}$ 的特征, 然后求和其通项公式即可;

(2) 方法二: 分组求和, 结合等差数列前 n 项和公式即可求得数列的前 20 项和.

【详解】

解: (1) [方法一] 【最优解】:

显然 $2n$ 为偶数, 则 $a_{2n+1} = a_{2n} + 2, a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1$,

所以 $a_{2n+2} = a_{2n} + 3$, 即 $b_{n+1} = b_n + 3$, 且 $b_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2$,

所以 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列,

于是 $b_1 = 2, b_2 = 5, b_n = 3n - 1$.

[方法二]: 奇偶分类讨论

由题意知 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$, 所以 $b_1 = a_2 = 2, b_2 = a_4 = a_3 + 1 = 5$.

由 $a_{n+1} - a_n = 1$ (n 为奇数) 及 $a_{n+1} - a_n = 2$ (n 为偶数) 可知,

数列从第一项起,

若 n 为奇数, 则其下一项减去该项的差为 1,

若 n 为偶数, 则其下一项减去该项的差为 2.

所以 $a_{n+2} - a_n = 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $b_n = b_1 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$.

[方法三]: 累加法

由题意知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以 $b_1 = a_2 = a_1 + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^1}{2} = 1 + 1 = 2$,

$b_2 = a_4 = a_3 + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^3}{2} = a_3 + 1 = a_2 + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^2}{2} + 1 = a_2 + 2 + 1 = 2 + 3 = 5$,

则 $b_n = a_{2n} = (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 2 + 1 + a_1$

$= n \times 1 + 2(n-1) + 1 = 3n - 1$.

所以 $b_1 = 2, b_2 = 5$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = 3n - 1$.

(2) [方法一]: 奇偶分类讨论

$S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20})$

$= (b_1 - 1 + b_2 - 1 + b_3 - 1 + \cdots + b_{10} - 1) + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10}$

$= 2 \times \frac{(b_1 + b_{10}) \times 10}{2} - 10 = 300$.

[方法二]: 分组求和

由题意知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{2n} = a_{2n-1} + 1, a_{2n+1} = a_{2n} + 2$,

所以 $a_{2n+1} = a_{2n} + 2 = a_{2n-1} + 3$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项, 3 为公差的等差数列;

同理, 由 $a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1 = a_{2n} + 3$ 知数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列.

从而数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为:

$$S_{20} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}) = 10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 + 10 \times 2 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 = 300 .$$

【整体点评】

(1)方法一: 由题意讨论 $\{b_n\}$ 的性质为最一般的思路和最优的解法;

方法二: 利用递推关系式分类讨论奇偶两种情况, 然后利用递推关系式确定数列的性质;

方法三: 写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 然后累加求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 是一种更加灵活的思路.

(2)方法一: 由通项公式分奇偶的情况求解前 n 项和是一种常规的方法;

方法二: 分组求和是常见的数列求和的一种方法, 结合等差数列前 n 项和公式和分组的方法进行求和是一种不错的选择.

9.【2021 年新高考 2 卷】记 S_n 是公差 $d \neq 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = S_5, a_2 a_4 = S_4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 求使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值.

【答案】(1) $a_n = 2n - 6$; (2) 7.

【解析】

【分析】

(1)由题意首先求得 a_3 的值, 然后结合题意求得数列的公差即可确定数列的通项公式;

(2)首先求得前 n 项和的表达式, 然后求解二次不等式即可确定 n 的最小值.

【详解】

(1)由等差数列的性质可得: $S_5 = 5a_3$, 则: $a_3 = 5a_3, \therefore a_3 = 0$,

设等差数列的公差为 d , 从而有: $a_2 a_4 = (a_3 - d)(a_3 + d) = -d^2$,

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 - d) = -2d$,

从而： $-d^2 = -2d$ ，由于公差不为零，故： $d = 2$ ，

数列的通项公式为： $a_n = a_3 + (n-3)d = 2n - 6$ 。

(2)由数列的通项公式可得： $a_1 = 2 - 6 = -4$ ，则： $S_n = n \times (-4) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 5n$ ，

则不等式 $S_n > a_n$ 即： $n^2 - 5n > 2n - 6$ ，整理可得： $(n-1)(n-6) > 0$ ，

解得： $n < 1$ 或 $n > 6$ ，又 n 为正整数，故 n 的最小值为 7。

【点睛】

等差数列基本量的求解是等差数列中的一类基本问题，解决这类问题的关键在于熟练掌握等差数列的有关公式并能灵活运用。

10. 【2020 年新课标 1 卷理科】 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列， a_1 为 a_2, a_3 的等差中项。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比；

(2) 若 $a_1 = 1$ ，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和。

【答案】 (1) -2 ； (2) $S_n = \frac{1 - (1+3n)(-2)^n}{9}$ 。

【解析】

【分析】

(1) 由已知结合等差中项关系，建立公比 q 的方程，求解即可得出结论；

(2) 由 (1) 结合条件得出 $\{a_n\}$ 的通项，根据 $\{na_n\}$ 的通项公式特征，用错位相减法，即可求出结论。

【详解】

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ， a_1 为 a_2, a_3 的等差中项，

$$\therefore 2a_1 = a_2 + a_3, a_1 \neq 0, \therefore q^2 + q - 2 = 0,$$

$$\therefore q \neq 1, \therefore q = -2;$$

(2) 设 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1, a_n = (-2)^{n-1}$ ，

$$S_n = 1 \times 1 + 2 \times (-2) + 3 \times (-2)^2 + \cdots + n(-2)^{n-1}, \quad ①$$

$$-2S_n = 1 \times (-2) + 2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2)^3 + \cdots + (n-1)(-2)^{n-1} + n(-2)^n, \quad ②$$

$$① - ② \text{得}, 3S_n = 1 + (-2) + (-2)^2 + \cdots + (-2)^{n-1} - n(-2)^n$$

$$= \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} - n(-2)^n = \frac{1-(1+3n)(-2)^n}{3},$$

$$\therefore S_n = \frac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}.$$

【点睛】

本题考查等比数列通项公式基本量的计算、等差中项的性质，以及错位相减法求和，考查计算求解能力，属于基础题.

11. 【2020 年新课标 3 卷理科】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2 , a_3 , 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

(2) 求数列 $\{2na_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $a_2=5$, $a_3=7$, $a_n=2n+1$, 证明见解析; (2) $S_n=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

【解析】

【分析】

(1) 方法一: (通性通法) 利用递推公式得出 a_2, a_3 , 猜想得出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 利用数学归纳法证明即可;

(2) 方法一: (通性通法) 根据通项公式的特征, 由错位相减法求解即可.

【详解】

(1)

[方法一] 【最优解】: 通性通法

由题意可得 $a_2=3a_1-4=9-4=5$, $a_3=3a_2-8=15-8=7$, 由数列 $\{a_n\}$ 的前三项可猜想数列

$\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列, 即 $a_n=2n+1$.

证明如下:

当 $n=1$ 时, $a_1=3$ 成立;

假设 $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_k=2k+1$ 成立.

那么 $n=k+1$ 时, $a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2k+3=2(k+1)+1$ 也成立.

则对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n=2n+1$ 成立;

[方法二]: 构造法

由题意可得 $a_2=3a_1-4=9-4=5$, $a_3=3a_2-8=15-8=7$. 由 $a_1=3, a_2=5$ 得

$a_2 - a_1 = 2$. $a_{n+1} = 3a_n - 4n$, 则 $a_n = 3a_{n-1} - 4(n-1)(n \geq 2)$, 两式相减得

$a_{n+1} - a_n = 3(a_n - a_{n-1}) - 4$. 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 且 $b_1 = 2$, 所以 $b_n = 3b_{n-1} - 4$, 两边同时减去 2,

得 $b_n - 2 = 3(b_{n-1} - 2)$, 且 $b_1 - 2 = 0$, 所以 $b_n - 2 = 0$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2$, 又 $a_2 - a_1 = 2$, 因此 $\{a_n\}$

是首项为 3, 公差为 2 的等差数列, 所以 $a_n = 2n + 1$.

[方法三]: 累加法

由题意可得 $a_2 = 3a_1 - 4 = 9 - 4 = 5$, $a_3 = 3a_2 - 8 = 15 - 8 = 7$.

由 $a_{n+1} = 3a_n - 4n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = -\frac{4n}{3^{n+1}}$, 即 $\frac{a_2}{3^2} - \frac{a_1}{3^1} = -4 \times \frac{1}{3^2}$, $\frac{a_3}{3^3} - \frac{a_2}{3^2} = -8 \times \frac{1}{3^3}$,

$\frac{a_n}{3^n} - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} = -4(n-1) \times \frac{1}{3^n} (n \geq 2)$. 以上各式等号两边相加得

$\frac{a_n}{3^n} - \frac{a_1}{3^1} = -4 \left[1 \times \frac{1}{3^2} + 2 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + (n-1) \times \frac{1}{3^n} \right]$, 所以 $\frac{a_n}{3^n} = (2n+1) \cdot \frac{1}{3^n}$. 所以

$a_n = 2n + 1 (n \geq 2)$. 当 $n = 1$ 时也符合上式. 综上所述, $a_n = 2n + 1$.

[方法四]: 构造法

$2a_2 = 3a_1 - 4 = 5$, $a_3 = 3a_2 - 8 = 7$, 猜想 $a_n = 2n + 1$. 由于 $a_{n+1} = 3a_n - 4n$, 所以可设

$a_{n+1} + \lambda(n+1) + \mu = 3(a_n + \lambda n + \mu)$, 其中 λ, μ 为常数. 整理得 $a_{n+1} = 3a_n + 2\lambda n + 2\mu - \lambda$. 故

$2\lambda = -4, 2\mu - \lambda = 0$, 解得 $\lambda = -2, \mu = -1$. 所以

$a_{n+1} - 2(n+1) - 1 = 3(a_n - 2n - 1) = \cdots = 3^n(a_1 - 2 \times 1 - 1)$. 又 $a_1 - 3 = 0$, 所以 $\{a_n - 2n - 1\}$ 是各项

均为 0 的常数列, 故 $a_n - 2n - 1 = 0$, 即 $a_n = 2n + 1$.

(2) 由 (1) 可知, $a_n \cdot 2^n = (2n+1) \cdot 2^n$

[方法一]: 错位相减法

$$S_n = 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n-1} + (2n+1) \cdot 2^n, \quad ①$$

$$2S_n = 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + 7 \times 2^4 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^n + (2n+1) \cdot 2^{n+1}, \quad ②$$

由①-②得: $-S_n = 6 + 2 \times (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n+1) \cdot 2^{n+1}$

$$= 6 + 2 \times \frac{2^2 \times (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (2n+1) \cdot 2^{n+1} = (1-2n) \cdot 2^{n+1} - 2,$$

即 $S_n = (2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

[方法二]【最优解】：裂项相消法

$$2^n a_n = (2n+1)2^n = (2n-1)2^{n+1} - (2n-3)2^n = b_{n+1} - b_n, \text{ 所以 } S_n = 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \cdots + 2^n a_n \\ = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1 = (2n-1)2^{n+1} + 2.$$

[方法三]：构造法

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = S_{n-1} + (2n+1) \cdot 2^n$, 设 $S_n + (pn+q) \cdot 2^n = S_{n-1} + [p(n-1)+q] \cdot 2^{n-1}$, 即

$$S_n = S_{n-1} + \frac{-pn-q-p}{2} \cdot 2^n, \text{ 则 } \begin{cases} \frac{-p}{2} = 2, \\ \frac{-q-p}{2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } p = -4, q = 2.$$

所以 $S_n + (-4n+2) \cdot 2^n = S_{n-1} + [-4(n-1)+2] \cdot 2^{n-1}$, 即 $\{S_n + (-4n+2) \cdot 2^n\}$ 为常数列, 而

$$S_1 + (-4+2) \cdot 2 = 2, \text{ 所以 } S_n + (-4n+2) \cdot 2^n = 2.$$

$$\text{故 } S_n = 2 + (2n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

[方法四]：

因为 $2^n a_n = (2n+1)2^n = 2n \cdot 2^n + 2^n = 4n \cdot 2^{n-1} + 2^n$, 令 $b_n = n \cdot 2^{n-1}$, 则

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} (x \neq 0, 1),$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2},$$

$$\text{所以 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = f'(2) = 1 + n \cdot 2^{n+1} - (n+1)2^n.$$

$$\text{故 } S_n = 4f'(2) + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 4[1 + n \cdot 2^{n+1} - (n+1)2^n] + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = (2n-1)2^{n+1} + 2.$$

【整体点评】

(1) 方法一：通过递推式求出数列 $\{a_n\}$ 的部分项从而归纳得出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再根据数学归纳法进行证明, 是该类问题的通性通法, 对于此题也是最优解;

方法二：根据递推式 $a_{n+1} = 3a_n - 4n$, 代换得 $a_n = 3a_{n-1} - 4(n-1) (n \geq 2)$, 两式相减得

$$a_{n+1} - a_n = 3(a_n - a_{n-1}) - 4, \text{ 设 } b_n = a_{n+1} - a_n, \text{ 从而简化递推式, 再根据构造法即可求出 } b_n,$$

从而得出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

方法三：由 $a_{n+1} = 3a_n - 4n$ 化简得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = -\frac{4n}{3^{n+1}}$ ，根据累加法即可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

方法四：通过递推式求出数列 $\{a_n\}$ 的部分项，归纳得出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再根据待定系数法将递推式变形成 $a_{n+1} + \lambda(n+1) + \mu = 3(a_n + \lambda n + \mu)$ ，求出 λ, μ ，从而可得构造数列为常数数列，即得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2)

方法一：根据通项公式的特征可知，可利用错位相减法解出，该法也是此类题型的通性通法；

方法二：根据通项公式裂项，由裂项相消法求出，过程简单，是本题的最优解法；

方法三：由 $n \geq 2$ 时， $S_n = S_{n-1} + (2n+1) \cdot 2^n$ ，构造得到数列 $\{S_n + (-4n+2) \cdot 2^n\}$ 为常数数列，从而求出；

方法四：将通项公式分解成 $2^n a_n = (2n+1)2^n = 2n \cdot 2^n + 2^n = 4n \cdot 2^{n-1} + 2^n$ ，利用分组求和法分别求出数列 $\{2^n\}, \{n \cdot 2^{n-1}\}$ 的前 n 项和即可，其中数列 $\{n \cdot 2^{n-1}\}$ 的前 n 项和借助于函数

$f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} (x \neq 0, 1)$ 的导数，通过赋值的方式求出，思路新颖独特，

很好的简化了运算。

12. 【2020 年新课标 3 卷文科】设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$ ， $a_3 - a_1 = 8$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和。若 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$ ，求 m 。

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$ ；(2) $m = 6$ 。

【解析】

【分析】

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，根据题意，列出方程组，求得首项和公比，进而求得通项公式；

(2) 由 (1) 求出 $\{\log_3 a_n\}$ 的通项公式，利用等差数列求和公式求得 S_n ，根据已知列出关于 m 的等量关系式，求得结果。

【详解】

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

根据题意, 有 $\begin{cases} a_1 + a_1 q = 4 \\ a_1 q^2 - a_1 = 8 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$,

所以 $a_n = 3^{n-1}$;

(2) 令 $b_n = \log_3 a_n = \log_3 3^{n-1} = n - 1$,

所以 $S_n = \frac{n(0+n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,

根据 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$, 可得 $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+3)}{2}$,

整理得 $m^2 - 5m - 6 = 0$, 因为 $m > 0$, 所以 $m = 6$,

【点睛】

本题考查等比数列通项公式基本量的计算, 以及等差数列求和公式的应用, 考查计算求解能力, 属于基础题目.

13. 【2020 年新高考 1 卷 (山东卷)】已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m](m \in \mathbf{N}^*)$ 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

【答案】(1) $a_n = 2^n$; (2) $S_{100} = 480$.

【解析】

【分析】

(1) 利用基本元的思想, 将已知条件转化为 a_1, q 的形式, 求解出 a_1, q , 由此求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 方法一: 通过分析数列 $\{b_m\}$ 的规律, 由此求得数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

【详解】

(1) 由于数列 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, 设首项为 a_1 , 公比为 q , 依题意有

$$\begin{cases} a_1 q + a_1 q^3 = 20 \\ a_1 q^2 = 8 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 2, q = 2, \text{ 或 } a_1 = 32, q = \frac{1}{2} \text{ (舍)},$$

所以 $a_n = 2^n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

(2) [方法一]: 规律探索

由于 $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128$, 所以

b_1 对应的区间为 $(0,1]$ ，则 $b_1 = 0$ ；

b_2, b_3 对应的区间分别为 $(0,2], (0,3]$ ，则 $b_2 = b_3 = 1$ ，即有 2 个 1；

b_4, b_5, b_6, b_7 对应的区间分别为 $(0,4], (0,5], (0,6], (0,7]$ ，则 $b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 2$ ，即有 2^2 个 2；

$b_8, b_9, \dots, b_{15}$ 对应的区间分别为 $(0,8], (0,9], \dots, (0,15]$ ，则 $b_8 = b_9 = \dots = b_{15} = 3$ ，即有 2^3 个 3；

$b_{16}, b_{17}, \dots, b_{31}$ 对应的区间分别为 $(0,16], (0,17], \dots, (0,31]$ ，则 $b_{16} = b_{17} = \dots = b_{31} = 4$ ，即有 2^4 个 4；

$b_{32}, b_{33}, \dots, b_{63}$ 对应的区间分别为 $(0,32], (0,33], \dots, (0,63]$ ，则 $b_{32} = b_{33} = \dots = b_{63} = 5$ ，即有 2^5 个 5；

$b_{64}, b_{65}, \dots, b_{100}$ 对应的区间分别为 $(0,64], (0,65], \dots, (0,100]$ ，则 $b_{64} = b_{65} = \dots = b_{100} = 6$ ，即有 37 个 6。

所以 $S_{100} = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + 5 \times 2^5 + 6 \times 37 = 480$ 。

【方法二】【最优解】：

由题意， $2^n \leq m$ ，即 $n \leq \log_2 m$ ，当 $m=1$ 时， $b_1 = 0$ 。

当 $m \in [2^k, 2^{k+1} - 1)$ 时， $b_m = k, k \in \mathbf{N}^*$ ，则

$$\begin{aligned} S_{100} &= b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + \dots + b_7) + \dots + (b_{32} + b_{33} + \dots + b_{63}) + (b_{64} + b_{65} + \dots + b_{100}) \\ &= 0 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 16 + 5 \times 32 + 6 \times 37 = 480。 \end{aligned}$$

【方法三】：

由题意知 $b_m = k, m \in [2^k, 2^{k+1})$ ，因此，当 $m=1$ 时， $b_1 = 0$ ； $m \in [2, 4)$ 时， $b_m = 1$ ； $m \in [4, 8)$ 时，

$b_m = 2$ ； $m \in [8, 16)$ 时， $b_m = 3$ ； $m \in [16, 32)$ 时， $b_m = 4$ ； $m \in [32, 64)$ 时， $b_m = 5$ ； $m \in [64, 128)$

时， $b_m = 6$ 。

所以 $S_{100} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{100}$

$$= 0 + (1+1) + (2+2+2) + \dots + (6+6+\dots+6)$$

$$= 0 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 16 + 5 \times 32 + 6 \times 37 = 480。$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和 $S_{100} = 480$ 。

【整体点评】

(2) 方法一：通过数列 $\{a_n\}$ 的前几项以及数列 $\{b_m\}$ 的规律可以得到 $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ 的值，从而

求出数列 $\{b_m\}$ 的前100项和,这是本题的通性通法;方法二:通过解指数不等式可得数列 $\{b_m\}$

的通项公式,从而求出数列 $\{b_m\}$ 的前100项和,是本题的最优解;方法三,是方法一的简化版.

14. 【2020年新高考2卷(海南卷)】已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1a_2 - a_2a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

【答案】(1) $a_n = 2^n$; (2) $\frac{8}{5} - (-1)^n \frac{2^{2n+3}}{5}$

【解析】

【分析】

(1)由题意得到关于首项、公比的方程组,求解方程组得到首项、公比的值即可确定数列的通项公式;

(2)首先求得数列 $\{(-1)^{n-1}a_na_{n+1}\}$ 的通项公式,然后结合等比数列前 n 项和公式求解其前 n 项和即可.

【详解】

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>1)$, 则 $\begin{cases} a_2 + a_4 = a_1q + a_1q^3 = 20 \\ a_3 = a_1q^2 = 8 \end{cases}$,

整理可得: $2q^2 - 5q + 2 = 0$,

$\because q > 1, q = 2, a_1 = 2$,

数列的通项公式为: $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

(2)由于: $(-1)^{n-1}a_na_{n+1} = (-1)^{n-1} \times 2^n \times 2^{n+1} = (-1)^{n-1} 2^{2n+1}$, 故:

$$\begin{aligned} & a_1a_2 - a_2a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_na_{n+1} \\ &= 2^3 - 2^5 + 2^7 - 2^9 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2^{2n+1} \\ &= \frac{2^3 [1 - (-2^2)^n]}{1 - (-2^2)} = \frac{8}{5} - (-1)^n \frac{2^{2n+3}}{5}. \end{aligned}$$

【点睛】

等比数列基本量的求解是等比数列中的一类基本问题,解决这类问题的关键在于熟练掌握等比数列的有关公式并能灵活运用,等差数列与等比数列求和公式是数列求和的基础.

15. 【2019 年新课标 1 卷文科】记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9 = -a_5$.

(1) 若 $a_3 = 4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1 > 0$, 求使得 $S_n \geq a_n$ 的 n 的取值范围.

【答案】(1) $a_n = -2n + 10$;

(2) $1 \leq n \leq 10 (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解析】

【分析】

(1) 首项设出等差数列的首项和公差, 根据题的条件, 建立关于 a_1 和 d 的方程组, 求得 a_1 和 d 的值, 利用等差数列的通项公式求得结果;

(2) 根据题意有 $a_5 = 0$, 根据 $a_1 > 0$, 可知 $d < 0$, 根据 $S_n > a_n$, 得到关于 n 的不等式, 从而求得结果.

【详解】

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{根据题意有} \begin{cases} 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = -(a_1 + 4d) \\ a_1 + 2d = 4 \end{cases},$$

$$\text{解答} \begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases}, \text{ 所以 } a_n = 8 + (n-1) \times (-2) = -2n + 10,$$

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n + 10$;

(2) 由条件 $S_9 = -a_5$, 得 $9a_5 = -a_5$, 即 $a_5 = 0$,

因为 $a_1 > 0$, 所以 $d < 0$, 并且有 $a_5 = a_1 + 4d = 0$, 所以有 $a_1 = -4d$,

由 $S_n \geq a_n$ 得 $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \geq a_1 + (n-1)d$, 整理得 $(n^2 - 9n)d \geq (2n - 10)d$,

因为 $d < 0$, 所以有 $n^2 - 9n \leq 2n - 10$, 即 $n^2 - 11n + 10 \leq 0$,

解得 $1 \leq n \leq 10$,

所以 n 的取值范围是: $1 \leq n \leq 10 (n \in \mathbf{N}^*)$

【点睛】

该题考查的是有关数列的问题，涉及到的知识点有等差数列的通项公式，等差数列的求和公式，在解题的过程中，需要认真分析题意，熟练掌握基础知识是正确解题的关键.

16. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$, $b_1=0$, $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$, $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1) 证明: $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 见解析; (2) $a_n = \frac{1}{2^n} + n - \frac{1}{2}$, $b_n = \frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】

(1) 可通过题意中的 $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$ 以及 $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$ 对两式进行相加和相减即可推

导出数列 $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列以及数列 $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列;

(2) 可通过(1)中的结果推导出数列 $\{a_n+b_n\}$ 以及数列 $\{a_n-b_n\}$ 的通项公式, 然后利用数列

$\{a_n+b_n\}$ 以及数列 $\{a_n-b_n\}$ 的通项公式即可得出结果.

【详解】

(1) 由题意可知 $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$, $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$, $a_1+b_1=1$, $a_1-b_1=1$,

所以 $4a_{n+1}+4b_{n+1}=3a_n-b_n+4+3b_n-a_n-4=2a_n+2b_n$, 即 $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$,

所以数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 1、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

因为 $4a_{n+1}-4b_{n+1}=3a_n-b_n+4-(3b_n-a_n-4)=4a_n-4b_n+8$,

所以 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$, 数列 $\{a_n-b_n\}$ 是首项 1、公差为 2 的等差数列, $a_n-b_n=2n-1$.

(2) 由(1)可知, $a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n-b_n=2n-1$,

所以 $a_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n+a_n-b_n)=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$, $b_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)-(a_n-b_n)=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$.

【点睛】

本题考查了数列的相关性质, 主要考查了等差数列以及等比数列的相关证明, 证明数列是等差数列或者等比数列一定要结合等差数列或者等比数列的定义, 考查推理能力, 考查化归与

转化思想，是中档题.

17. 【2019 年新课标 2 卷文科】已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $a_1 = 2, a_3 = 2a_2 + 16$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】(1) $a_n = 2^{2n-1}$ ；(2) $S_n = n^2$.

【解析】

【分析】

(1) 本题首先可以根据数列 $\{a_n\}$ 是等比数列将 a_3 转化为 $a_1 q^2$ ， a_2 转化为 $a_1 q$ ，再然后将其带入 $a_3 = 2a_2 + 16$ 中，并根据数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数以及 $a_1 = 2$ 即可通过运算得出结果；

(2) 本题可以通过数列 $\{a_n\}$ 的通项公式以及对数的相关性质计算出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，再通过数列 $\{b_n\}$ 的通项公式得知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，最后通过等差数列求和公式即可得出结果.

【详解】

(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $a_3 = 2a_2 + 16$ ， $a_1 = 2$ ，

所以令数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ， $a_3 = a_1 q^2 = 2q^2$ ， $a_2 = a_1 q = 2q$ ，

所以 $2q^2 = 4q + 16$ ，解得 $q = -2$ (舍去) 或 4 ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2 、公比为 4 的等比数列， $a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$.

(2) 因为 $b_n = \log_2 a_n$ ，所以 $b_n = 2n - 1$ ， $b_{n+1} = 2n + 1$ ， $b_{n+1} - b_n = 2$ ，

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1 、公差为 2 的等差数列， $S_n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$.

【点睛】

本题考查数列的相关性质，主要考查等差数列以及等比数列的通项公式的求法，考查等差数列求和公式的使用，考查化归与转化思想，考查计算能力，是简单题.

18. 【2018 年新课标 1 卷文科】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$ ，设 $b_n = \frac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 ；

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$; (2) $\{b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列. 理由见解

析; (3) $a_n = n \cdot 2^{n-1}$.

【解析】

【分析】

(1) 根据题中条件所给的数列 $\{a_n\}$ 的递推公式 $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$, 将其化为 $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n$,

分别令 $n=1$ 和 $n=2$, 代入上式求得 $a_2 = 4$ 和 $a_3 = 12$, 再利用 $b_n = \frac{a_n}{n}$, 从而求得 $b_1 = 1$, $b_2 = 2$,

$b_3 = 4$;

(2) 利用条件可以得到 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$, 从而可以得出 $b_{n+1} = 2b_n$, 这样就可以得到数列 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列;

(3) 借助等比数列的通项公式求得 $\frac{a_n}{n} = 2^{n-1}$, 从而求得 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$.

【详解】

(1) 由条件可得 $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n$.

将 $n=1$ 代入得, $a_2 = 4a_1$, 而 $a_1 = 1$, 所以, $a_2 = 4$.

将 $n=2$ 代入得, $a_3 = 3a_2$, 所以, $a_3 = 12$.

从而 $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$;

(2) $\{b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列.

由条件可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$, 即 $b_{n+1} = 2b_n$, 又 $b_1 = 1$,

所以 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列;

(3) 由 (2) 可得 $\frac{a_n}{n} = b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$.

【点睛】

该题考查的是有关数列的问题, 涉及到的知识点有根据数列的递推公式确定数列的项, 根据不同数列的项之间的关系, 确定新数列的项, 利用递推关系整理得到相邻两项之间的关系确

定数列是等比数列，根据等比数列通项公式求得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，借助于 $\{b_n\}$ 的通项公式求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，从而求得最后的结果.

19. 【2018 年新课标 2 卷理科】记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = -7$ ， $S_3 = -15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 S_n ，并求 S_n 的最小值.

【答案】(1) $a_n = 2n - 9$ ，(2) $S_n = n^2 - 8n$ ，最小值为 -16 .

【解析】

【详解】

分析：(1) 根据等差数列前 n 项和公式，求出公差，再代入等差数列通项公式得结果，(2) 根据等差数列前 n 项和公式得 S_n 的二次函数关系式，根据二次函数对称轴以及自变量为正整数求函数最值.

详解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由题意得 $3a_1 + 3d = -15$.

由 $a_1 = -7$ 得 $d = 2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 9$.

(2) 由 (1) 得 $S_n = n^2 - 8n = (n - 4)^2 - 16$.

所以当 $n = 4$ 时， S_n 取得最小值，最小值为 -16 .

点睛：数列是特殊的函数，研究数列最值问题，可利用函数性质，但要注意其定义域为正整数集这一限制条件.

20. 【2018 年新课标 3 卷理科】等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_5 = 4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m = 63$ ，求 m .

【答案】(1) $a_n = (-2)^{n-1}$ 或 $a_n = 2^{n-1}$.

(2) $m = 6$.

【解析】

【详解】

分析：(1) 列出方程，解出 q 可得；(2) 求出前 n 项和，解方程可得 m .

详解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由题设得 $a_n = q^{n-1}$ 。

由已知得 $q^4 = 4q^2$ ，解得 $q = 0$ （舍去）， $q = -2$ 或 $q = 2$ 。

故 $a_n = (-2)^{n-1}$ 或 $a_n = 2^{n-1}$ 。

（2）若 $a_n = (-2)^{n-1}$ ，则 $S_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}$ 。由 $S_m = 63$ 得 $(-2)^m = -188$ ，此方程没有正整数解。

若 $a_n = 2^{n-1}$ ，则 $S_n = 2^n - 1$ 。由 $S_m = 63$ 得 $2^m = 64$ ，解得 $m = 6$ 。

综上， $m = 6$ 。

点睛：本题主要考查等比数列的通项公式和前 n 项和公式，属于基础题。

