

专题 13 数列（解答题）

1. 【2022 年全国甲卷】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

2. 【2022 年新高考 1 卷】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1, \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

3. 【2022 年新高考 2 卷】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = b_4 - a_4$.

(1) 证明: $a_1 = b_1$;

(2) 求集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中元素个数.

4. 【2021 年甲卷文科】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0, a_2 = 3a_1$, 且数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

5. 【2021 年甲卷理科】已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

6. 【2021 年乙卷文科】设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$. 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明: $T_n < \frac{S_n}{2}$.

7. 【2021 年乙卷理科】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知

$$\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2.$$

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

8. 【2021 年新高考 1 卷】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1, n \text{ 为奇数,} \\ a_n+2, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(1) 记 $b_n=a_{2n}$, 写出 b_1, b_2 , 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

9. 【2021 年新高考 2 卷】记 S_n 是公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3=S_5, a_2a_4=S_4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 求使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值.

10. 【2020 年新课标 1 卷理科】设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1=1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

11. 【2020 年新课标 3 卷理科】设数列 $\{an\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2, a_3 , 猜想 $\{an\}$ 的通项公式并加以证明;

(2) 求数列 $\{2nan\}$ 的前 n 项和 Sn .

12. 【2020 年新课标 3 卷文科】设等比数列 $\{an\}$ 满足 $a_1+a_2=4$, $a_3-a_1=8$.

(1) 求 $\{an\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 an\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$, 求 m .

13. 【2020 年新高考 1 卷 (山东卷)】已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20, a_3=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m](m \in \mathbf{N}^*)$ 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

14. 【2020 年新高考 2 卷 (海南卷)】已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20, a_3=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1a_2-a_2a_3+\dots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

15. 【2019 年新课标 1 卷文科】记 Sn 为等差数列 $\{an\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9=-a_5$.

(1) 若 $a_3=4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1>0$, 求使得 $S_n\geq a_n$ 的 n 的取值范围.

16. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$, $b_1=0$, $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$,

$$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4.$$

(1) 证明: $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

17. 【2019 年新课标 2 卷文科】已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1=2$, $a_3=2a_2+16$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. 【2018 年新课标 1 卷文科】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $na_{n+1}=2(n+1)a_n$, 设 $b_n=\frac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 ;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. 【2018 年新课标 2 卷理科】记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=-7$, $S_3=-15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

20. 【2018 年新课标 3 卷理科】等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_5=4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$, 求 m .

