

## 专题 12 数列（选填题）

1. 【2022 年全国乙卷】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168,  $a_2 - a_5 = 42$ , 则 $a_6 = ( \quad )$

A. 14

B. 12

C. 6

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q \neq 0$ , 易得 $q \neq 1$ , 根据题意求出首项与公比, 再根据等比数列的通项即可得解.

【详解】

解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q \neq 0$ ,

若 $q = 1$ , 则 $a_2 - a_5 = 0$ , 与题意矛盾,

所以 $q \neq 1$ ,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 168 \\ a_2 - a_5 = a_1q - a_1q^4 = 42 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1 = 96 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases},$$

所以 $a_6 = a_1q^5 = 3$ .

故选: D.

2. 【2022 年全国乙卷】嫦娥二号卫星在完成探月任务后, 继续进行深空探测, 成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星, 为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值, 用到数列

$$\{b_n\}: b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}, \dots, \text{依此类推, 其}$$

中 $\alpha_k \in N^*(k = 1, 2, \dots)$ . 则 ( )

A.  $b_1 < b_5$

B.  $b_3 < b_8$

C.  $b_6 < b_2$

D.  $b_4 < b_7$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据 $\alpha_k \in N^*(k = 1, 2, \dots)$ , 再利用数列 $\{b_n\}$ 与 $\alpha_k$ 的关系判断 $\{b_n\}$ 中各项的大小, 即可求解.

【详解】

解: 因为 $\alpha_k \in N^*(k = 1, 2, \dots)$ ,

所以 $\alpha_1 < \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ ,  $\frac{1}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$ , 得到 $b_1 > b_2$ ,

同理  $\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} > \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}$ , 可得  $b_2 < b_3$ ,  $b_1 > b_3$

又因为  $\frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4}}}$ ,  $\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}} < \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4}}}$ ,

故  $b_2 < b_4$ ,  $b_3 > b_4$ ;

以此类推, 可得  $b_1 > b_3 > b_5 > b_7 > \dots$ ,  $b_7 > b_8$ , 故 A 错误;

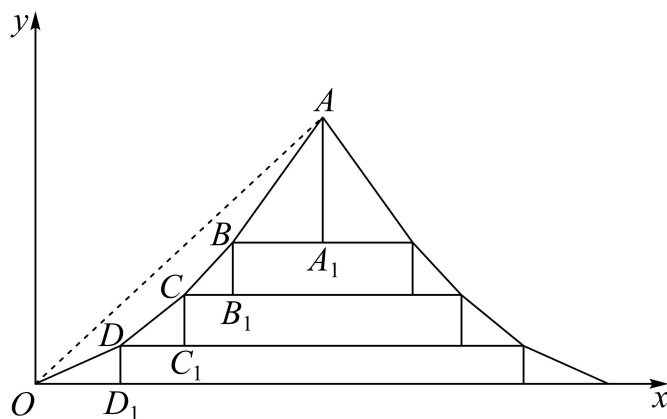
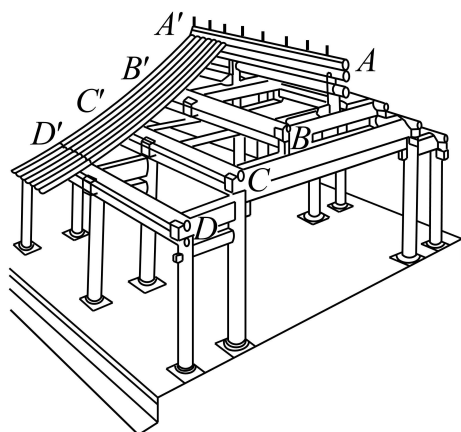
$b_1 > b_7 > b_8$ , 故 B 错误;

$\frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha_6}}}$ , 得  $b_2 < b_6$ , 故 C 错误;

$\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4}}} > \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_6 + \frac{1}{\alpha_7}}}$ , 得  $b_4 < b_7$ , 故 D 正确.

故选: D.

3. 【2022 年新高考 2 卷】中国的古建筑不仅是挡风遮雨的住处, 更是美学和哲学的体现. 如图是某古建筑物的剖面图,  $DD_1, CC_1, BB_1, AA_1$  是举,  $OD_1, DC_1, CB_1, BA_1$  是相等的步, 相邻桁的举步之比分别为  $\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5, \frac{CC_1}{DC_1} = k_1, \frac{BB_1}{CB_1} = k_2, \frac{AA_1}{BA_1} = k_3$ , 若  $k_1, k_2, k_3$  是公差为 0.1 的等差数列, 且直线  $OA$  的斜率为 0.725, 则  $k_3 = ( \quad )$



A. 0.75

B. 0.8

C. 0.85

D. 0.9

【答案】D

【解析】

【分析】

设  $OD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1 = 1$ , 则可得关于  $k_3$  的方程, 求出其解后可得正确的选项.

【详解】

设  $OD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1 = 1$ , 则  $CC_1 = k_1, BB_1 = k_2, AA_1 = k_3$ ,

依题意, 有  $k_3 - 0.2 = k_1, k_3 - 0.1 = k_2$ , 且  $\frac{DD_1 + CC_1 + BB_1 + AA_1}{OD_1 + DC_1 + CB_1 + BA_1} = 0.725$ ,

所以  $\frac{0.5+3k_3-0.3}{4} = 0.725$ , 故  $k_3 = 0.9$ ,

故选: D

4. 【2021 年甲卷文科】记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $S_2 = 4$ ,  $S_4 = 6$ , 则  $S_6 =$  ( )

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】

根据题目条件可得  $S_2$ ,  $S_4 - S_2$ ,  $S_6 - S_4$  成等比数列, 从而求出  $S_6 - S_4 = 1$ , 进一步求出答案.

【详解】

$\because S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,

$\therefore S_2$ ,  $S_4 - S_2$ ,  $S_6 - S_4$  成等比数列

$\therefore S_2 = 4$ ,  $S_4 - S_2 = 6 - 4 = 2$

$\therefore S_6 - S_4 = 1$ ,

$\therefore S_6 = 1 + S_4 = 1 + 6 = 7$ .

故选: A.

5. 【2021 年甲卷理科】等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 设甲:  $q > 0$ , 乙:  $\{S_n\}$  是递增数列, 则 ( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

当  $q > 0$  时, 通过举反例说明甲不是乙的充分条件; 当  $\{S_n\}$  是递增数列时, 必有  $a_n > 0$  成立

即可说明  $q > 0$  成立, 则甲是乙的必要条件, 即可选出答案.

【详解】

由题，当数列为 $-2, -4, -8, \dots$ 时，满足 $q > 0$ ，

但是 $\{S_n\}$ 不是递增数列，所以甲不是乙的充分条件.

若 $\{S_n\}$ 是递增数列，则必有 $a_n > 0$ 成立，若 $q > 0$ 不成立，则会出现一正一负的情况，是矛盾的，则 $q > 0$ 成立，所以甲是乙的必要条件.

故选：B.

【点睛】

在不成立的情况下，我们可以通过举反例说明，但是在成立的情况下，我们必须给予其证明过程.

6. 【2020 年新课标 1 卷文科】设 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ， $a_2 + a_3 + a_4 = 2$ ，则

$$a_6 + a_7 + a_8 = ( \quad )$$

A. 12

B. 24

C. 30

D. 32

【答案】D

【解析】

【分析】

根据已知条件求得 $q$ 的值，再由 $a_6 + a_7 + a_8 = q^5(a_1 + a_2 + a_3)$ 可求得结果.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 1$ ，

$$a_2 + a_3 + a_4 = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = a_1q(1 + q + q^2) = q = 2,$$

$$\text{因此， } a_6 + a_7 + a_8 = a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = a_1q^5(1 + q + q^2) = q^5 = 32.$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查等比数列基本量的计算，属于基础题.

7. 【2020 年新课标 2 卷理科】北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块，已知每层环数相同，且下层比中层多 729 块，则三层共有扇面形石板(不含天心石) ( )



A. 3699 块

B. 3474 块

C. 3402 块

D. 3339 块

【答案】C

【解析】

【分析】

第  $n$  环天石心块数为  $a_n$ ，第一层共有  $n$  环，则  $\{a_n\}$  是以 9 为首项，9 为公差的等差数列，

设  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，由题意可得  $S_{3n} - S_{2n} = S_{2n} - S_n + 729$ ，解方程即可得到  $n$ ，进一步

得到  $S_{3n}$ 。

【详解】

设第  $n$  环天石心块数为  $a_n$ ，第一层共有  $n$  环，

则  $\{a_n\}$  是以 9 为首项，9 为公差的等差数列， $a_n = 9 + (n-1) \times 9 = 9n$ ，

设  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，则第一层、第二层、第三层的块数分

别为  $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ ，因为下层比中层多 729 块，

所以  $S_{3n} - S_{2n} = S_{2n} - S_n + 729$ ，

$$\text{即 } \frac{3n(9+27n)}{2} - \frac{2n(9+18n)}{2} = \frac{2n(9+18n)}{2} - \frac{n(9+9n)}{2} + 729$$

即  $9n^2 = 729$ ，解得  $n = 9$ ，

$$\text{所以 } S_{3n} = S_{27} = \frac{27(9+9 \times 27)}{2} = 3402.$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查等差数列前  $n$  项和有关的计算问题，考查学生数学运算能力，是一道容易题。

8. 【2020 年新课标 2 卷理科】数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ , 对任意  $m, n \in \mathbb{N}^+$ ,  $a_{m+n} = a_m a_n$ , 若

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = 2^{15} - 2^5, \text{ 则 } k = ( )$$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】

取  $m=1$ , 可得出数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 求得数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 利用等比数列求和公式可得出关于  $k$  的等式, 由  $k \in \mathbb{N}^*$  可求得  $k$  的值.

【详解】

在等式  $a_{m+n} = a_m a_n$  中, 令  $m=1$ , 可得  $a_{n+1} = a_n a_1 = 2a_n$ ,  $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ,

所以, 数列  $\{a_n\}$  是以 2 为首项, 以 2 为公比的等比数列, 则  $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ,

$$\therefore a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = \frac{a_{k+1} \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{2^{k+1} \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = 2^{k+1} (2^{10} - 1) = 2^5 (2^{10} - 1),$$

$$\therefore 2^{k+1} = 2^5, \text{ 则 } k+1=5, \text{ 解得 } k=4.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查利用等比数列求和求参数的值, 解答的关键就是求出数列的通项公式, 考查计算能力, 属于中等题.

9. 【2020 年新课标 2 卷理科】0-1 周期序列在通信技术中有着重要应用. 若序列  $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$  满足  $a_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \cdots)$ , 且存在正整数  $m$ , 使得  $a_{i+m} = a_i (i=1, 2, \cdots)$  成立, 则称其为 0-1 周期序列, 并称满足  $a_{i+m} = a_i (i=1, 2, \cdots)$  的最小正整数  $m$  为这个序列的周期. 对于周期为  $m$  的 0-1 序列

$a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ ,  $C(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i a_{i+k} (k=1, 2, \cdots, m-1)$  是描述其性质的重要指标, 下列周期为 5 的 0-1

序列中, 满足  $C(k) \leq \frac{1}{5} (k=1, 2, 3, 4)$  的序列是 ( )

A. 11010...

B. 11011...

C. 10001...

D. 11001...

【答案】C

【解析】

【分析】

根据新定义，逐一检验即可

【详解】

由  $a_{i+m} = a_i$  知，序列  $a_i$  的周期为  $m$ ，由已知， $m=5$ ，

$$C(k) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i a_{i+k}, k=1, 2, 3, 4$$

对于选项 A，

$$C(1) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i a_{i+1} = \frac{1}{5} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + a_5 a_6) = \frac{1}{5} (1+0+0+0+0) = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{5}$$

$$C(2) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i a_{i+2} = \frac{1}{5} (a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_7) = \frac{1}{5} (0+1+0+1+0) = \frac{2}{5}, \text{ 不满足；}$$

对于选项 B，

$$C(1) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i a_{i+1} = \frac{1}{5} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + a_5 a_6) = \frac{1}{5} (1+0+0+1+1) = \frac{3}{5}, \text{ 不满足；}$$

对于选项 D，

$$C(1) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i a_{i+1} = \frac{1}{5} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + a_5 a_6) = \frac{1}{5} (1+0+0+0+1) = \frac{2}{5}, \text{ 不满足；}$$

故选：C

【点睛】

本题考查数列的新定义问题，涉及到周期数列，考查学生对新定义的理解能力以及数学运算能力，是一道中档题.

10. 【2020 年新课标 2 卷文科】记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $a_5 - a_3 = 12$ ,  $a_6 - a_4 = 24$ ,

则  $\frac{S_n}{a_n} = ( \quad )$

A.  $2n-1$

B.  $2-2^{1-n}$

C.  $2-2n^{-1}$

D.  $2^{1-n}-1$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据等比数列的通项公式，可以得到方程组，解方程组求出首项和公比，最后利用等比数列的通项公式和前  $n$  项和公式进行求解即可.

【详解】

设等比数列的公比为  $q$ ，

$$\text{由 } a_5 - a_3 = 12, a_6 - a_4 = 24 \text{ 可得: } \begin{cases} a_1 q^4 - a_1 q^2 = 12 \\ a_1 q^5 - a_1 q^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases},$$

所以  $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$ ,  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ,

因此  $\frac{S_n}{a_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - 2^{1-n}$ .

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式的基本量计算，考查了等比数列前  $n$  项和公式的应用，考查了数学运算能力.

11. 【2019 年新课标 1 卷理科】记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $S_4 = 0$ ,  $a_5 = 5$ , 则

A.  $a_n = 2n - 5$       B.  $a_n = 3n - 10$       C.  $S_n = 2n^2 - 8n$       D.  $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

【答案】A

【解析】

【分析】

等差数列通项公式与前  $n$  项和公式. 本题还可用排除, 对 B,  $a_5 = 5$ ,  $S_4 = \frac{4(-7+2)}{2} = -10 \neq 0$ ,

排除 B, 对 C,  $S_4 = 0$ ,  $a_5 = S_5 - S_4 = 2 \times 5^2 - 8 \times 5 - 0 = 10 \neq 5$ , 排除 C. 对 D,

$S_4 = 0$ ,  $a_5 = S_5 - S_4 = \frac{1}{2} \times 5^2 - 2 \times 5 - 0 = \frac{5}{2} \neq 5$ , 排除 D, 故选 A.

【详解】

由题知,  $\begin{cases} S_4 = 4a_1 + \frac{d}{2} \times 4 \times 3 = 0 \\ a_5 = a_1 + 4d = 5 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a_1 = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ ,  $\therefore a_n = 2n - 5$ , 故选 A.

【点睛】

本题主要考查等差数列通项公式与前  $n$  项和公式, 渗透方程思想与数学计算等素养. 利用等差数列通项公式与前  $n$  项公式即可列出关于首项与公差的方程, 解出首项与公差, 在适当计算即可做了判断.

12. 【2019 年新课标 3 卷理科】已知各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  的前 4 项和为 15, 且

$a_5 = 3a_3 + 4a_1$ , 则  $a_3 =$

A. 16      B. 8      C. 4      D. 2

【答案】C

【解析】

利用方程思想列出关于  $a_1, q$  的方程组，求出  $a_1, q$ ，再利用通项公式即可求得  $a_3$  的值.

【详解】

设正数的等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，则 
$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 15, \\ a_1q^4 = 3a_1q^2 + 4a_1 \end{cases},$$

解得  $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2 \end{cases}$ ， $\therefore a_3 = a_1q^2 = 4$ ，故选 C.

【点睛】

本题利用方程思想求解数列的基本量，熟练应用公式是解题的关键.

13. 【2018 年新课标 1 卷理科】设  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $3S_3 = S_2 + S_4$ ， $a_1 = 2$ ，

则  $a_5 =$

A. -12

B. -10

C. 10

D. 12

【答案】B

【解析】

【详解】

分析：首先设出等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，利用等差数列的求和公式，得到公差  $d$  所满足的等量关系式，从而求得结果  $d = -3$ ，之后应用等差数列的通项公式求得

$a_5 = a_1 + 4d = 2 - 12 = -10$ ，从而求得正确结果.

详解：设该等差数列的公差为  $d$ ，

根据题中的条件可得  $3(3 \times 2 + \frac{3 \times 2}{2} \cdot d) = 2 \times 2 + d + 4 \times 2 + \frac{4 \times 3}{2} \cdot d$ ，

整理解得  $d = -3$ ，所以  $a_5 = a_1 + 4d = 2 - 12 = -10$ ，故选 B.

点睛：该题考查的是有关等差数列的求和公式和通项公式的应用，在解题的过程中，需要利用题中的条件，结合等差数列的求和公式，得到公差  $d$  的值，之后利用等差数列的通项公式得到  $a_5$  与  $a_1$  和  $d$  的关系，从而求得结果.

14. 【2022 年全国乙卷】记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $2S_3 = 3S_2 + 6$ ，则公差  $d =$  \_\_\_\_.

【答案】2

【解析】

【分析】

转化条件为  $2(a_1+2d) = 2a_1 + d + 6$ ，即可得解.

【详解】

由  $2S_3 = 3S_2 + 6$  可得  $2(a_1 + a_2 + a_3) = 3(a_1 + a_2) + 6$ ，化简得  $2a_3 = a_1 + a_2 + 6$ ，

即  $2(a_1+2d) = 2a_1 + d + 6$ ，解得  $d = 2$ .

故答案为：2.

15. 【2021 年新高考 1 卷】某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为  $20\text{dm} \times 12\text{dm}$  的长方形纸，对折 1 次共可以得到  $10\text{dm} \times 12\text{dm}$ ， $20\text{dm} \times 6\text{dm}$  两种规格的图形，它们的面积之和  $S_1 = 240\text{dm}^2$ ，对折 2 次共可以得到  $5\text{dm} \times 12\text{dm}$ ， $10\text{dm} \times 6\text{dm}$ ， $20\text{dm} \times 3\text{dm}$  三种规格的图形，它们的面积之和  $S_2 = 180\text{dm}^2$ ，以此类推，则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为\_\_\_\_\_；如果对折  $n$  次，那么  $\sum_{k=1}^n S_k = \underline{\hspace{2cm}} \text{dm}^2$ .

【答案】 5  $720 - \frac{15(3+n)}{2^{n-4}}$

【解析】

【分析】

(1) 按对折列举即可；(2) 根据规律可得  $S_n$ ，再根据错位相减法得结果.

【详解】

(1) 由对折 2 次共可以得到  $5\text{dm} \times 12\text{dm}$ ， $10\text{dm} \times 6\text{dm}$ ， $20\text{dm} \times 3\text{dm}$  三种规格的图形，所以对着三次的结果有： $\frac{5}{2} \times 12, 5 \times 6, 10 \times 3; 20 \times \frac{3}{2}$ ，共 4 种不同规格（单位  $\text{dm}^2$ ）；

故对折 4 次可得到如下规格： $\frac{5}{4} \times 12$ ， $\frac{5}{2} \times 6$ ， $5 \times 3$ ， $10 \times \frac{3}{2}$ ， $20 \times \frac{3}{4}$ ，共 5 种不同规格；

(2) 由于每次对着后的图形的面积都减小为原来的一半，故各次对着后的图形，不论规格如何，其面积成公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列，首项为  $120(\text{dm}^2)$ ，第  $n$  次对折后的图形面积为

$120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ，对于第  $n$  此对折后的图形的规格形状种数，根据(1)的过程和结论，猜想为  $n+1$

种（证明从略），故得猜想  $S_n = \frac{120(n+1)}{2^{n-1}}$ ，

设  $S = \sum_{k=1}^n S_k = \frac{120 \times 2}{2^0} + \frac{120 \times 3}{2^1} + \frac{120 \times 4}{2^2} + \dots + \frac{120(n+1)}{2^{n-1}}$ ，

$$\text{则 } \frac{1}{2}S = \frac{120 \times 2}{2^1} + \frac{120 \times 3}{2^2} + \cdots + \frac{120n}{2^{n-1}} + \frac{120(n+1)}{2^n},$$

两式作差得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= 240 + 120 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{120(n+1)}{2^n} \\ &= 240 + \frac{60 \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{120(n+1)}{2^n} \end{aligned}$$

$$= 360 - \frac{120}{2^{n-1}} - \frac{120(n+1)}{2^n} = 360 - \frac{120(n+3)}{2^n},$$

$$\text{因此, } S = 720 - \frac{240(n+3)}{2^n} = 720 - \frac{15(n+3)}{2^{n-4}}.$$

$$\text{故答案为: } 5; 720 - \frac{15(n+3)}{2^{n-4}}.$$

【点睛】

方法点睛：数列求和的常用方法：

(1) 对于等差等比数列，利用公式法可直接求解；

(2) 对于  $\{a_n b_n\}$  结构，其中  $\{a_n\}$  是等差数列， $\{b_n\}$  是等比数列，用错位相减法求和；

(3) 对于  $\{a_n + b_n\}$  结构，利用分组求和法；

(4) 对于  $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$  结构，其中  $\{a_n\}$  是等差数列，公差为  $d (d \neq 0)$ ，则  $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$ ，

利用裂项相消法求和.

16. 【2020 年新课标 1 卷文科】数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1$ ，前 16 项和为 540，则  $a_1 =$

\_\_\_\_\_.

【答案】 7

【解析】

【分析】

对  $n$  为奇偶数分类讨论，分别得出奇数项、偶数项的递推关系，由奇数项递推公式将奇数项用  $a_1$  表示，由偶数项递推公式得出偶数项的和，建立  $a_1$  方程，求解即可得出结论.

【详解】

$$a_{n+2} + (-1)^n a_n = 3n - 1,$$

当  $n$  为奇数时,  $a_{n+2} = a_n + 3n - 1$ ; 当  $n$  为偶数时,  $a_{n+2} + a_n = 3n - 1$ .

设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,

$$S_{16} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{16}$$

$$= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{15} + (a_2 + a_4) + \cdots (a_{14} + a_{16})$$

$$= a_1 + (a_1 + 2) + (a_1 + 10) + (a_1 + 24) + (a_1 + 44) + (a_1 + 70)$$

$$+ (a_1 + 102) + (a_1 + 140) + (5 + 17 + 29 + 41)$$

$$= 8a_1 + 392 + 92 = 8a_1 + 484 = 540,$$

$$\therefore a_1 = 7.$$

故答案为: 7.

【点睛】

本题考查数列的递推公式的应用, 以及数列的并项求和, 考查分类讨论思想和数学计算能力, 属于较难题.

17. 【2020 年新课标 2 卷文科】记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $a_1 = -2$ ,  $a_2 + a_6 = 2$ ,

则  $S_{10} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 25

【解析】

【分析】

因为  $\{a_n\}$  是等差数列, 根据已知条件  $a_2 + a_6 = 2$ , 求出公差, 根据等差数列前  $n$  项和, 即可求得答案.

【详解】

$\therefore \{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = -2$ ,  $a_2 + a_6 = 2$

设  $\{a_n\}$  等差数列的公差  $d$

根据等差数列通项公式:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

可得  $a_1 + d + a_1 + 5d = 2$

即：  $-2 + d + (-2) + 5d = 2$

整理可得：  $6d = 6$

解得：  $d = 1$

∴ 根据等差数列前  $n$  项和公式：  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, n \in N^*$

可得：  $S_{10} = 10(-2) + \frac{10 \times (10-1)}{2} = -20 + 45 = 25$

∴  $S_{10} = 25$ .

故答案为： 25 .

【点睛】

本题主要考查了求等差数列的前  $n$  项和，解题关键是掌握等差数列的前  $n$  项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

18. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】将数列  $\{2n-1\}$  与  $\{3n-2\}$  的公共项从小到大排列得到数列  $\{a_n\}$ ，则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为\_\_\_\_\_.

【答案】  $3n^2 - 2n$

【解析】

【分析】

首先判断出数列  $\{2n-1\}$  与  $\{3n-2\}$  项的特征，从而判断出两个数列公共项所构成新数列的首项以及公差，利用等差数列的求和公式求得结果.

【详解】

因为数列  $\{2n-1\}$  是以 1 为首项，以 2 为公差的等差数列，

数列  $\{3n-2\}$  是以 1 首项，以 3 为公差的等差数列，

所以这两个数列的公共项所构成的新数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项，以 6 为公差的等差数列，

所以  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6 = 3n^2 - 2n$ ，

故答案为：  $3n^2 - 2n$  .

【点睛】

该题考查的是有关数列的问题，涉及到的知识点有两个等差数列的公共项构成新数列的特征，等差数列求和公式，属于简单题目.

19. 【2019 年新课标 1 卷理科】记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_4^2 = a_6$ , 则  $S_5$  = \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{121}{3}$ .

【解析】

【分析】

本题根据已知条件, 列出关于等比数列公比  $q$  的方程, 应用等比数列的求和公式, 计算得到  $S_5$ . 题目的难度不大, 注重了基础知识、基本计算能力的考查.

【详解】

设等比数列的公比为  $q$ , 由已知  $a_1 = \frac{1}{3}, a_4^2 = a_6$ , 所以  $(\frac{1}{3}q^3)^2 = \frac{1}{3}q^5$ , 又  $q \neq 0$ ,

所以  $q = 3$ , 所以  $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{1-3} = \frac{121}{3}$ .

【点睛】

准确计算, 是解答此类问题的基本要求. 本题由于涉及幂的乘方运算、繁分式分式计算, 部分考生易出现运算错误.

20. 【2019 年新课标 1 卷文科】记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $a_1 = 1$ ,  $S_3 = \frac{3}{4}$ , 则  $S_4$  = \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{5}{8}$ .

【解析】

【分析】

本题根据已知条件, 列出关于等比数列公比  $q$  的方程, 应用等比数列的求和公式, 计算得到  $S_4$ . 题目的难度不大, 注重了基础知识、基本计算能力的考查.

【详解】

详解: 设等比数列的公比为  $q$ , 由已知

$$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = 1 + q + q^2 = \frac{3}{4}, \text{ 即 } q^2 + q + \frac{1}{4} = 0$$

解得  $q = -\frac{1}{2}$ ,

$$\text{所以 } S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1-(-\frac{1}{2})^4}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{5}{8}.$$

【点睛】

准确计算，是解答此类问题的基本要求．本题由于涉及幂的乘方运算、繁分式分式计算，部分考生易出现运算错误．

一题多解：本题在求得数列的公比后，可利用已知计算  $S_4 = S_3 + a_4 = S_3 + a_1 q^3 = \frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{8}$ ，

避免繁分式计算．

21. 【2019 年新课标 3 卷理科】记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和， $a_1 \neq 0$ ， $a_2 = 3a_1$ ，则  $\frac{S_{10}}{S_5} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】4.

【解析】

【分析】

根据已知求出  $a_1$  和  $d$  的关系，再结合等差数列前  $n$  项和公式求得结果.

【详解】

因  $a_2 = 3a_1$ ，所以  $a_1 + d = 3a_1$ ，即  $2a_1 = d$ ，

$$\text{所以 } \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d}{5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d} = \frac{100a_1}{25a_1} = 4.$$

【点睛】

本题主要考查等差数列的性质、基本量的计算，渗透了数学运算素养，使用转化思想得出答案.

22. 【2019 年新课标 3 卷文科】记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $a_3 = 5, a_7 = 13$ ，则  $S_{10} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】100

【解析】

【分析】

根据题意可求出首项和公差，进而求得结果.

【详解】

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 5 \\ a_7 = a_1 + 6d = 13 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\therefore S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2 = 100.$$

【点睛】

本题考点为等差数列的求和，为基础题目，利用基本量思想解题即可，充分记牢等差数列的求和公式是解题的关键.

23. 【2018 年新课标 1 卷理科】记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_n = 2a_n + 1$ ，则  $S_6 =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 -63

【解析】

【分析】

首先根据题中所给的  $S_n = 2a_n + 1$ ，类比着写出  $S_{n+1} = 2a_{n+1} + 1$ ，两式相减，整理得到  $a_{n+1} = 2a_n$ ，从而确定出数列  $\{a_n\}$  为等比数列，再令  $n = 1$ ，结合  $a_1, S_1$  的关系，求得  $a_1 = -1$ ，之后应用等比数列的求和公式求得  $S_6$  的值.

【详解】

根据  $S_n = 2a_n + 1$ ，可得  $S_{n+1} = 2a_{n+1} + 1$ ，

两式相减得  $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$ ，即  $a_{n+1} = 2a_n$ ，

当  $n = 1$  时， $S_1 = a_1 = 2a_1 + 1$ ，解得  $a_1 = -1$ ，

所以数列  $\{a_n\}$  是以 -1 为首项，以 2 为公比的等比数列，

所以  $S_6 = \frac{-1(1-2^6)}{1-2} = -63$ ，故答案是 -63.

点睛：该题考查的是有关数列的求和问题，在求解的过程中，需要先利用题中的条件，类比着往后写一个式子，之后两式相减，得到相邻两项之间的关系，从而确定出该数列是等比数列，之后令  $n = 1$ ，求得数列的首项，最后应用等比数列的求和公式求解即可，只要明确对既有项又有和的式子的变形方向即可得结果.

## 免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能