

专题 11 平面向量

1. 【2022 年全国乙卷】已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-2, 4)$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】

先求得 $\vec{a} - \vec{b}$, 然后求得 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

【详解】

因为 $\vec{a} - \vec{b} = (2, 1) - (-2, 4) = (4, -3)$, 所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

故选: D

2. 【2022 年全国乙卷】已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 3$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

根据给定模长, 利用向量的数量积运算求解即可.

【详解】

解: $\because |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$,

又 $\because |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 3$,

$\therefore 9 = 1 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 3 = 13 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}$,

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

故选: C.

3. 【2022 年新高考 1 卷】在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$. 记 $\vec{CA} = \vec{m}$, $\vec{CD} = \vec{n}$, 则 $\vec{CB} =$ ()

- A. $3\vec{m} - 2\vec{n}$ B. $-2\vec{m} + 3\vec{n}$ C. $3\vec{m} + 2\vec{n}$ D. $2\vec{m} + 3\vec{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据几何条件以及平面向量的线性运算即可解出.

【详解】

因为点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$, 所以 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DA}$, 即 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD})$,

所以 $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA} = 3\vec{n} - 2\vec{m} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$.

故选: B.

4. 【2022 年新高考 2 卷】已知向量 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$, 若 $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$, 则 $t = (\quad)$

A. -6

B. -5

C. 5

D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】

利用向量的运算和向量的夹角的余弦公式的坐标形式化简即可求得

【详解】

解: $\vec{c} = (3 + t, 4)$, $\cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$, 即 $\frac{9+3t+16}{5|\vec{c}|} = \frac{3+t}{|\vec{c}|}$, 解得 $t = 5$,

故选: C

5. 【2020 年新课标 2 卷文科】已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 则在下列向量中, 与 $\vec{b}$ 垂直的是 ()

A. $\vec{a} + 2\vec{b}$

B. $2\vec{a} + \vec{b}$

C. $\vec{a} - 2\vec{b}$

D. $2\vec{a} - \vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据平面向量数量积的定义、运算性质, 结合两平面向量垂直数量积为零这一性质逐一判断即可.

【详解】

由已知可得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

A: 因为 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = \frac{1}{2} + 2 \times 1 = \frac{5}{2} \neq 0$, 所以本选项不符合题意;

B: 因为 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 \neq 0$, 所以本选项不符合题意;

C: 因为 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = \frac{1}{2} - 2 \times 1 = -\frac{3}{2} \neq 0$, 所以本选项不符合题意;

D: 因为 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$, 所以本选项符合题意.

故选: D.

【点睛】

本题考查了平面向量数量积的定义和运算性质,考查了两平面向量数量积为零则这两个平面向量互相垂直这一性质,考查了数学运算能力.

6. 【2020 年新课标 3 卷理科】已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$, 则

$\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle =$ ()

- A. $-\frac{31}{35}$ B. $-\frac{19}{35}$ C. $\frac{17}{35}$ D. $\frac{19}{35}$

【答案】D

【解析】

【分析】

计算出 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ 、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值, 利用平面向量数量积可计算出 $\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$ 的值.

【详解】

$$\because |\vec{a}|=5, |\vec{b}|=6, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6, \therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 5^2 - 6 = 19.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{25 - 2 \times 6 + 36} = 7,$$

$$\text{因此, } \cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{19}{5 \times 7} = \frac{19}{35}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查平面向量夹角余弦值的计算,同时也考查了平面向量数量积的计算以及向量模的计算,考查计算能力,属于中等题.

7. 【2020 年新高考 1 卷(山东卷)】已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()

- A. $(-2, 6)$ B. $(-6, 2)$
C. $(-2, 4)$ D. $(-4, 6)$

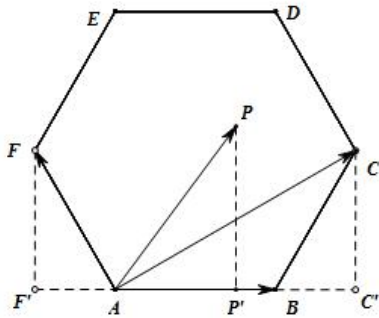
【答案】A

【解析】

【分析】

首先根据题中所给的条件，结合正六边形的特征，得到 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的取值范围是 $(-1,3)$ ，利用向量数量积的定义式，求得结果.

【详解】



$\overrightarrow{AB}$ 的模为 2，根据正六边形的特征，

可以得到 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的取值范围是 $(-1,3)$ ，

结合向量数量积的定义式，

可知 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 等于 $\overrightarrow{AB}$ 的模与 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的乘积，

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $(-2,6)$ ，

故选：A.

【点睛】

该题以正六边形为载体，考查有关平面向量数量积的取值范围，涉及到的知识点有向量数量积的定义式，属于简单题目.

8. 【2020 年新高考 2 卷（海南卷）】在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边上的中点，则 $\overrightarrow{CB} = (\quad)$

- A. $2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}$ B. $\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA}$ C. $2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$ D. $\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CA}$

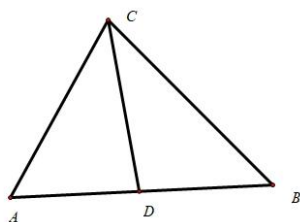
【答案】C

【解析】

【分析】

根据向量的加减法运算法则算出即可.

【详解】



$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$$

故选：C

【点睛】

本题考查的是向量的加减法，较简单.

9. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查利用平面向量数量积计算向量长度、夹角与垂直问题，渗透了转化与化归、数学计算等数学素养. 先由 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ 得出向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积与其模的关系，再利用向量夹角公式即可计算出向量夹角.

【详解】

因为 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，所以 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0$ ，所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}^2$ ，所以 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|^2}{2|\vec{b}|^2} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，故选 B.

【点睛】

对向量夹角的计算，先计算出向量的数量积及各个向量的模，在利用向量夹角公式求出夹角的余弦值，再求出夹角，注意向量夹角范围为 $[0, \pi]$.

10. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知 $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ ， $\overrightarrow{AC} = (3, t)$ ， $|\overrightarrow{BC}| = 1$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$

- A. -3 B. -2
C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】

根据向量三角形法则求出 t ，再求出向量的数量积.

【详解】

由 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1, t-3)$ ， $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (t-3)^2} = 1$ ，得 $t=3$ ，则 $\overrightarrow{BC} = (1, 0)$ ，

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (2, 3) \cdot (1, 0) = 2 \times 1 + 3 \times 0 = 2$. 故选 C.

【点睛】

本题考点为平面向量的数量积，侧重基础知识和基本技能，难度不大.

11. 【2019 年新课标 2 卷文科】已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (3, 2)$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $5\sqrt{2}$

D. 50

【答案】A

【解析】

【分析】

本题先计算 $\vec{a} - \vec{b}$ ，再根据模的概念求出 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

【详解】

由已知， $\vec{a} - \vec{b} = (2, 3) - (3, 2) = (-1, 1)$ ，

所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

故选 A

【点睛】

本题主要考查平面向量模长的计算，容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查. 由于对平面向量的坐标运算存在理解错误，从而导致计算有误；也有可能是在计算模的过程中出错.

12. 【2018 年新课标 1 卷理科】在 $\triangle ABC$ 中， AD 为 BC 边上的中线， E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB} =$

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

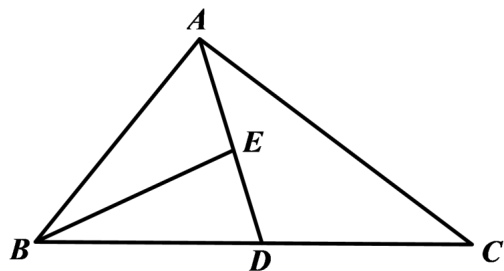
【解析】

【分析】

分析：首先将图画出来，接着应用三角形中线向量的特征，求得 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ ，之后应用向量的加法运算法则-----三角形法则，得到 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ ，之后将其合并，得到 $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，下一步应用相反向量，求得 $\overrightarrow{EB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，从而求得结果.

【详解】

根据向量的运算法则，可得



$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

所以 $\overrightarrow{EB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，故选 A.

【点睛】

该题考查的是有关平面向量基本定理的有关问题，涉及到的知识点有三角形的中线向量、向量加法的三角形法则、共线向量的表示以及相反向量的问题，在解题的过程中，需要认真对待每一步运算.

13. 【2018 年新课标 2 卷理科】已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ，则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) =$

A. 4

B. 3

C. 2

D. 0

【答案】B

【解析】

【详解】

分析：根据向量模的性质以及向量乘法得结果.

详解：因为 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - (-1) = 2 + 1 = 3$,

所以选 B.

点睛：向量加减乘： $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

14. 【2021 年新高考 1 卷】已知 O 为坐标原点，点 $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $P_2(\cos \beta, -\sin \beta)$ ，

$P_3(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$, $A(1,0)$, 则 ()

A. $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

【答案】AC

【解析】

【分析】

A、B 写出 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{AP_1}$, $\overrightarrow{AP_2}$ 的坐标, 利用坐标公式求模, 即可判断正误; C、D 根据向量的坐标, 应用向量数量积的坐标表示及两角和差公式化简, 即可判断正误.

【详解】

A: $\overrightarrow{OP_1} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\overrightarrow{OP_2} = (\cos \beta, -\sin \beta)$, 所以 $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$,

$|\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{(\cos \beta)^2 + (-\sin \beta)^2} = 1$, 故 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$, 正确;

B: $\overrightarrow{AP_1} = (\cos \alpha - 1, \sin \alpha)$, $\overrightarrow{AP_2} = (\cos \beta - 1, -\sin \beta)$, 所以

$$|\overrightarrow{AP_1}| = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2|\sin \frac{\alpha}{2}|$$

, 同理 $|\overrightarrow{AP_2}| = \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 + \sin^2 \beta} = 2|\sin \frac{\beta}{2}|$, 故 $|\overrightarrow{AP_1}|, |\overrightarrow{AP_2}|$ 不一定相等, 错误;

C: 由题意得: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 1 \times \cos(\alpha + \beta) + 0 \times \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$,

$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot (-\sin \beta) = \cos(\alpha + \beta)$, 正确;

D: 由题意得: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 1 \times \cos \alpha + 0 \times \sin \alpha = \cos \alpha$,

$$\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \cos \beta \times \cos(\alpha + \beta) + (-\sin \beta) \times \sin(\alpha + \beta)$$

$= \cos(\beta + (\alpha + \beta)) = \cos(\alpha + 2\beta)$, 故一般来说 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} \neq \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$ 故错误;

故选: AC

15. 【2022 年全国甲卷】已知向量 $\vec{a} = (m, 3)$, $\vec{b} = (1, m+1)$. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{4}$ 或 -0.75

【解析】

【分析】

直接由向量垂直的坐标表示求解即可.

【详解】

由题意知: $\vec{a} \cdot \vec{b} = m + 3(m + 1) = 0$, 解得 $m = -\frac{3}{4}$.

故答案为: $-\frac{3}{4}$.

16. 【2022 年全国甲卷】设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} =$

_____.

【答案】11

【解析】

【分析】

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ , 依题意可得 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 再根据数量积的定义求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 最后根据数量积的运算律计算可得.

【详解】

解: 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ , 因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 即 $\cos \theta = \frac{1}{3}$,

又 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1$,

所以 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 \times 1 + 3^2 = 11$.

故答案为: 11.

17. 【2021 年甲卷文科】若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{a} - \vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

根据题目条件, 利用 $\vec{a} - \vec{b}$ 模的平方可以得出答案

【详解】

$$\because |\vec{a} - \vec{b}| = 5$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + |\vec{b}|^2 - 2 = 25$$

$$\therefore |\vec{b}| = 3\sqrt{2}.$$

故答案为： $3\sqrt{2}$.

18. 【2021 年甲卷理科】 已知向量 $\vec{a}=(3,1), \vec{b}=(1,0), \vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}$. 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $k=$ _____.

【答案】 $-\frac{10}{3}$.

【解析】

【分析】

利用向量的坐标运算法则求得向量 $\vec{c}$ 的坐标，利用向量的数量积为零求得 k 的值

【详解】

$$\because \vec{a}=(3,1), \vec{b}=(1,0), \therefore \vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}=(3+k,1),$$

$$\because \vec{a} \perp \vec{c}, \therefore \vec{a} \cdot \vec{c}=3(3+k)+1 \times 1=0, \text{ 解得 } k=-\frac{10}{3},$$

故答案为： $-\frac{10}{3}$.

【点睛】

本题考查平面向量的坐标运算，平面向量垂直的条件，属基础题，利用平面向量

$\vec{p}=(x_1, y_1), \vec{q}=(x_2, y_2)$ 垂直的充分必要条件是数量积 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

19. 【2021 年乙卷文科】 已知向量 $\vec{a}=(2,5), \vec{b}=(\lambda,4)$, 若 $\frac{1}{a} // \frac{1}{b}$, 则 $\lambda=$ _____.

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】

利用向量平行的充分必要条件得到关于 λ 的方程，解方程即可求得实数 λ 的值.

【详解】

由题意结合向量平行的充分必要条件可得： $2 \times 4 - \lambda \times 5 = 0$,

解方程可得： $\lambda = \frac{8}{5}$.

故答案为： $\frac{8}{5}$.

20. 【2021 年乙卷理科】 已知向量 $\vec{a}=(1,3), \vec{b}=(3,4)$, 若 $(\vec{a}-\lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\lambda=$ _____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】

根据平面向量数量积的坐标表示以及向量的线性运算列出方程，即可解出.

【详解】

因为 $\vec{a} - \lambda\vec{b} = (1, 3) - \lambda(3, 4) = (1 - 3\lambda, 3 - 4\lambda)$ ，所以由 $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$ 可得，

$$3(1 - 3\lambda) + 4(3 - 4\lambda) = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{3}{5}.$$

故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点睛】

本题解题关键是熟记平面向量数量积的坐标表示，设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \text{ 注意与平面向量平行的坐标表示区分.}$$

21. 【2021 年新高考 2 卷】已知向量 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ， $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ _____.

【答案】 $-\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】

由已知可得 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$ ，展开化简后可得结果.

【详解】

$$\text{由已知可得 } (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0,$$

$$\text{因此, } \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{9}{2}.$$

故答案为: $-\frac{9}{2}$.

22. 【2020 年新课标 1 卷理科】设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

整理已知可得: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2}$ ，再利用 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量即可求得 $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ，对 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 变形

可得： $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$ ，问题得解.

【详解】

因为 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量，所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

所以 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=1$

解得： $2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{3}$

故答案为： $\sqrt{3}$

【点睛】

本题主要考查了向量模的计算公式及转化能力，属于中档题.

23. 【2020 年新课标 1 卷文科】设向量 $\vec{a}=(1,-1), \vec{b}=(m+1, 2m-4)$ ，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$ ，则 $m=$ _____.

【答案】5

【解析】

【分析】

根据向量垂直，结合题中所给的向量的坐标，利用向量垂直的坐标表示，求得结果.

【详解】

由 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ，

又因为 $\vec{a}=(1,-1), \vec{b}=(m+1, 2m-4)$ ，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(m+1)+(-1)\cdot(2m-4)=0$ ，

即 $m=5$ ，

故答案为：5.

【点睛】

本题考查有关向量运算问题，涉及到的知识点有向量垂直的坐标表示，属于基础题目.

24. 【2020 年新课标 2 卷理科】已知单位向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 45° ， $k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 $k=$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】

首先求得向量的数量积，然后结合向量垂直的充分必要条件即可求得实数 k 的值.

【详解】

由题意可得： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

由向量垂直的充分必要条件可得： $\left(k\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$ ，

即： $k \times \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = k - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ，解得： $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【点睛】

本题主要考查平面向量的数量积定义与运算法则，向量垂直的充分必要条件等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

25. 【2019 年新课标 3 卷理科】已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，若 $\vec{c} = 2\vec{a} - \sqrt{5}\vec{b}$ ，则

$\cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ 。

【解析】

【分析】

根据 $|\vec{c}|^2$ 结合向量夹角公式求出 $|\vec{c}|$ ，进一步求出结果.

【详解】

因为 $\vec{c} = 2\vec{a} - \sqrt{5}\vec{b}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，

所以 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2\vec{a}^2 - \sqrt{5}\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ ，

$|\vec{c}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\sqrt{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = 9$ ，所以 $|\vec{c}| = 3$ ，

所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$ 。

【点睛】

本题主要考查平面向量的数量积、向量的夹角，渗透了数学运算、直观想象素养，使用转化思想得出答案.

26. 【2019 年新课标 3 卷文科】已知向量 $\vec{a} = (2, 2)$, $\vec{b} = (-8, 6)$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】

【分析】

根据向量夹角公式可求出结果.

【详解】

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \times (-8) + 2 \times 6}{\sqrt{2^2 + 2^2} \times \sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

【点睛】

本题考查了向量夹角的运算, 牢记平面向量的夹角公式是破解问题的关键.

27. 【2018 年新课标 3 卷理科】已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (1, \lambda)$. 若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\lambda =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

由两向量共线的坐标关系计算即可.

【详解】

由题可得 $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$

$$\because \vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{c} = (1, \lambda)$$

$$\therefore 4\lambda - 2 = 0, \text{ 即 } \lambda = \frac{1}{2}$$

故答案为 $\frac{1}{2}$

【点睛】

本题主要考查向量的坐标运算, 以及两向量共线的坐标关系, 属于基础题.

