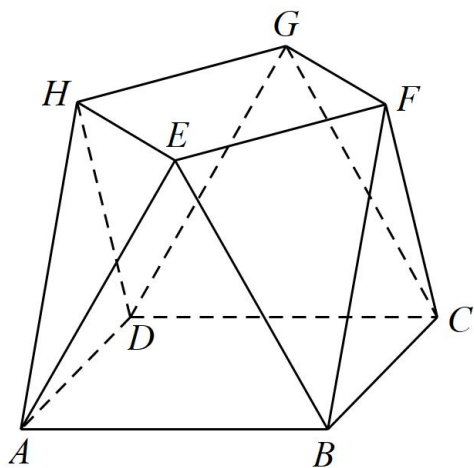


专题 06 立体几何（解答题）（文科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面 $ABCD$ 是边长为 8（单位：cm）的正方形， $\triangle EAB, \triangle FBC, \triangle GCD, \triangle HDA$ 均为正三角形，且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直.



(1) 证明： $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求该包装盒的容积（不计包装盒材料的厚度）.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) $\frac{640}{3}\sqrt{3}$.

【解析】

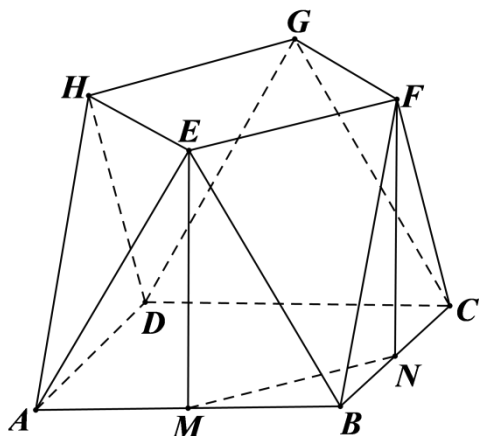
【分析】

(1) 分别取 AB, BC 的中点 M, N ，连接 MN ，由平面知识可知 $EM \perp AB, FN \perp BC$ ， $EM = FN$ ，依题从而可证 $EM \perp$ 平面 $ABCD$ ， $FN \perp$ 平面 $ABCD$ ，根据线面垂直的性质定理可知 $EM \parallel FN$ ，即可知四边形 $EMNF$ 为平行四边形，于是 $EF \parallel MN$ ，最后根据线面平行的判定定理即可证出；

(2) 再分别取 AD, DC 中点 K, L ，由(1)知，该几何体的体积等于长方体 $KMNL - EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B - MNFE$ 体积的 4 倍，即可解出.

(1)

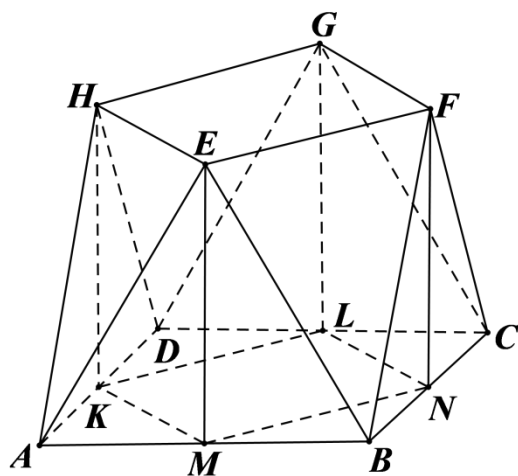
如图所示：



分别取 AB, BC 的中点 M, N ，连接 MN ，因为 $\triangle EAB, \triangle FBC$ 为全等的正三角形，所以 $EM \perp AB, FN \perp BC$ ， $EM = FN$ ，又平面 $EAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $EAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ， $EM \subset$ 平面 EAB ，所以 $EM \perp$ 平面 $ABCD$ ，同理可得 $FN \perp$ 平面 $ABCD$ ，根据线面垂直的性质定理可知 $EM \parallel FN$ ，而 $EM = FN$ ，所以四边形 $EMNF$ 为平行四边形，所以 $EF \parallel MN$ ，又 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$ ， $MN \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ 。

(2)

如图所示：

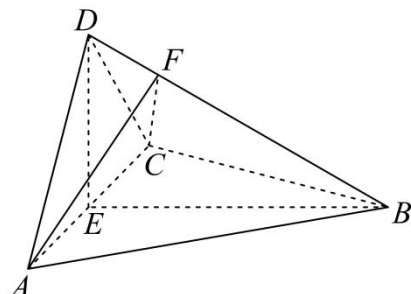


分别取 AD, DC 中点 K, L ，由(1)知， $EF \parallel MN$ 且 $EF = MN$ ，同理有， $HE \parallel KM, HE = KM, HG \parallel KL, HG = KL, GF \parallel LN, GF = LN$ ，由平面知识可知， $BD \perp MN, MN \perp MK, KM = MN = NL = LK$ ，所以该几何体的体积等于长方体 $KMNL - EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B - MNFE$ 体积的 4 倍。

因为 $MN = NL = LK = KM = 4\sqrt{2}$ ， $EM = 8\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ ，点 B 到平面 $MNFE$ 的距离即为点 B 到直线 MN 的距离 d ， $d = 2\sqrt{2}$ ，所以该几何体的体积 $V = (4\sqrt{2})^2 \times 4\sqrt{3} + 4 \times \frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times$

$$4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 128\sqrt{3} + \frac{256}{3}\sqrt{3} = \frac{640}{3}\sqrt{3}.$$

2. 【2022 年全国乙卷】如图，四面体 $ABCD$ 中， $AD \perp CD$, $AD = CD$, $\angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 的中点.



(1) 证明：平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求三棱锥 $F - ABC$ 的体积.

【答案】(1) 证明详见解析

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{4}$$

【解析】

【分析】

(1) 通过证明 $AC \perp$ 平面 BED 来证得平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

(2) 首先判断出三角形 AFC 的面积最小时 F 点的位置, 然后求得 F 到平面 ABC 的距离, 从而求得三棱锥 $F - ABC$ 的体积.

(1)

由于 $AD = CD$, E 是 AC 的中点, 所以 $AC \perp DE$.

由于 $\begin{cases} AD = CD \\ BD = BD \\ \angle ADB = \angle CDB \end{cases}$, 所以 $\triangle ADB \cong \triangle CDB$,

所以 $AB = CB$, 故 $AC \perp BD$,

由于 $DE \cap BD = D$, $DE, BD \subset$ 平面 BED ,

所以 $AC \perp$ 平面 BED ,

由于 $AC \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

(2)

依题意 $AB = BD = BC = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$, 三角形 ABC 是等边三角形,

所以 $AC = 2$, $AE = CE = 1$, $BE = \sqrt{3}$,

由于 $AD = CD, AD \perp CD$ ，所以三角形 ACD 是等腰直角三角形，所以 $DE = 1$.

$DE^2 + BE^2 = BD^2$ ，所以 $DE \perp BE$ ，

由于 $AC \cap BE = E, AC, BE \subset \text{平面} ABC$ ，所以 $DE \perp \text{平面} ABC$.

由于 $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ ，所以 $\angle FBA = \angle FBC$ ，

由于 $\begin{cases} BF = BF \\ \angle FBA = \angle FBC \\ AB = CB \end{cases}$ ，所以 $\triangle FBA \cong \triangle FBC$ ，

所以 $AF = CF$ ，所以 $EF \perp AC$ ，

由于 $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot EF$ ，所以当 EF 最短时，三角形 AFC 的面积最小值.

过 E 作 $EF \perp BD$ ，垂足为 F ，

在 $\text{Rt} \triangle BED$ 中， $\frac{1}{2} \cdot BE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF$ ，解得 $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

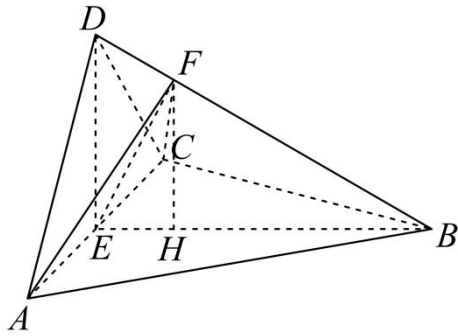
所以 $DF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ ， $BF = 2 - DF = \frac{3}{2}$ ，

所以 $\frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}$.

过 F 作 $FH \perp BE$ ，垂足为 H ，则 $FH \parallel DE$ ，所以 $FH \perp \text{平面} ABC$ ，且 $\frac{FH}{DE} = \frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}$ ，

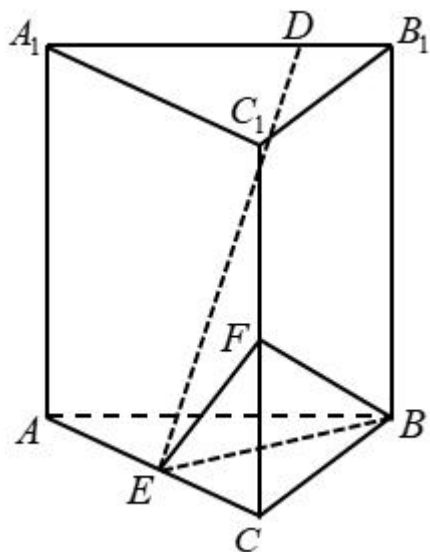
所以 $FH = \frac{3}{4}$ ，

所以 $V_{F-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot FH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



3. 【2021 年甲卷文科】已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形， $AB = BC = 2$ ，

E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点， $BF \perp A_1B_1$.



(1) 求三棱锥 $F-EBC$ 的体积；

(2) 已知 D 为棱 A_1B_1 上的点，证明： $BF \perp DE$.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$ ；(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 先证明 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，然后利用体积公式可得三棱锥的体积；

(2) 将所给的几何体进行补形，从而把线线垂直的问题转化为证明线面垂直，然后再由线面垂直可得题中的结论.

【详解】

(1) 由于 $BF \perp A_1B_1$ ， $AB \parallel A_1B_1$ ， 所以 $AB \perp BF$ ，

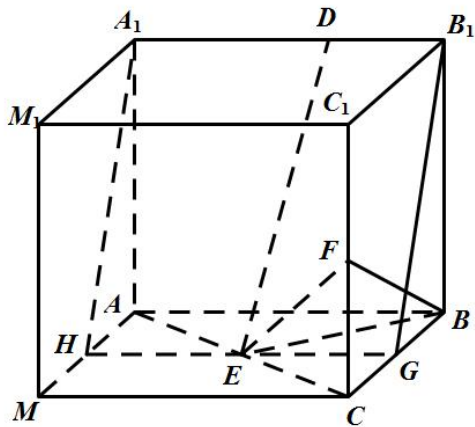
又 $AB \perp BB_1$ ， $BB_1 \cap BF = B$ ， 故 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

则 $AB \perp BC$ ， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 1, \quad V_{F-EBC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCE} \times CF = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

(2) 由 (1) 的结论可将几何体补形为一个棱长为 2 的正方体 $ABCM - A_1B_1C_1M_1$ ， 如图所示，

取棱 AM, BC 的中点 H, G ， 连结 A_1H, HG, GB_1 ，



正方形 BCC_1B_1 中, G, F 为中点, 则 $BF \perp B_1G$,

又 $BF \perp A_1B_1, A_1B_1 \cap B_1G = B_1$,

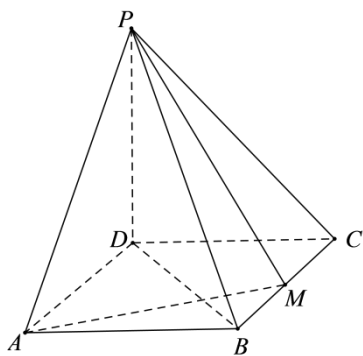
故 $BF \perp$ 平面 A_1B_1GH , 而 $DE \subset$ 平面 A_1B_1GH ,

从而 $BF \perp DE$.

【点睛】

求三棱锥的体积时要注意三棱锥的每个面都可以作为底面, 例如三棱锥的三条侧棱两两垂直, 我们就选择其中的一个侧面作为底面, 另一条侧棱作为高来求体积. 对于空间中垂直关系(线线、线面、面面)的证明经常进行等价转化.

4. **【2021 年乙卷文科】** 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.



(1) 证明: 平面 $PAM \perp$ 平面 PBD ;

(2) 若 $PD = DC = 1$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】

【分析】

(1) 由 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ 可得 $PD \perp AM$ ，又 $PB \perp AM$ ，由线面垂直的判定定理可得 $AM \perp$ 平面 PBD ，再根据面面垂直的判定定理即可证出平面 $PAM \perp$ 平面 PBD ；

(2) 由 (1) 可知， $AM \perp BD$ ，由平面知识可知， $\triangle DAB \sim \triangle ABM$ ，由相似比可求出 AD ，再根据四棱锥 $P-ABCD$ 的体积公式即可求出。

【详解】

(1) 因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AM \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PD \perp AM$ ，

又 $PB \perp AM$ ， $PB \cap PD = P$ ，

所以 $AM \perp$ 平面 PBD ，

而 $AM \subset$ 平面 PAM ，

所以平面 $PAM \perp$ 平面 PBD 。

(2) [方法一]：相似三角形法

由 (1) 可知 $AM \perp BD$ 。

于是 $\triangle ABD \sim \triangle BMA$ ，故 $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BM}$ 。

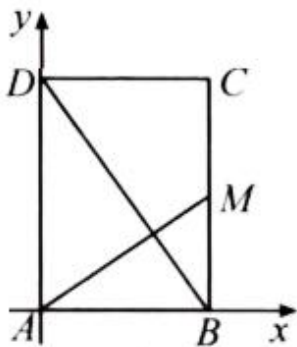
因为 $BM = \frac{1}{2}BC$ ， $AD = BC$ ， $AB = 1$ ，所以 $\frac{1}{2}BC^2 = 1$ ，即 $BC = \sqrt{2}$ 。

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3}AB \cdot BC \cdot PD = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 。

[方法二]：平面直角坐标系垂直垂直法

由 (2) 知 $AM \perp DB$ ，所以 $k_{AM} \cdot k_{BD} = -1$ 。

建立如图所示的平面直角坐标系，设 $BC = 2a(a > 0)$ 。



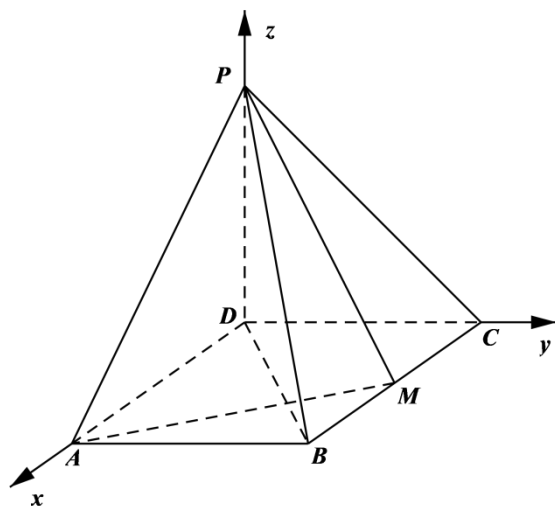
因为 $DC = 1$ ，所以 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， $D(0,2a)$ ， $M(1,a)$ 。

从而 $k_{AM} \cdot k_{BD} = \frac{a-0}{1-0} \times \frac{2a-0}{0-1} = a \times (-2a) = -2a^2 = -1$ 。

所以 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $DA = \sqrt{2}$ 。下同方法一。

[方法三] 【最优解】：空间直角坐标系法

建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$ ，



设 $|DA| = t$ ，所以 $D(0,0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ， $P(0,0,1)$ ， $A(t,0,0)$ ， $B(t,1,0)$ 。

所以 $M\left(\frac{t}{2}, 1, 0\right)$ ， $\overrightarrow{PB} = (t, 1, -1)$ ， $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{t}{2}, 1, 0\right)$ 。

所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = t \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) + 1 \times 1 + 0 \times (-1) = -\frac{t^2}{2} + 1 = 0$ 。

所以 $t = \sqrt{2}$ ，即 $|DA| = \sqrt{2}$ 。下同方法一。

[方法四]：空间向量法

由 $PB \perp AM$ ，得 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ 。

所以 $(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ 。

即 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ 。

又 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， AM 在平面 $ABCD$ 内，

因此 $PD \perp AM$ ，所以 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ 。

所以 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ ，

由于四边形 $ABCD$ 是矩形，根据数量积的几何意义，

得 $-\frac{1}{2}|\overrightarrow{DA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = 0$ ，即 $-\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 + 1 = 0$ 。

所以 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$ ，即 $BC = \sqrt{2}$ 。下同方法一。

【整体点评】

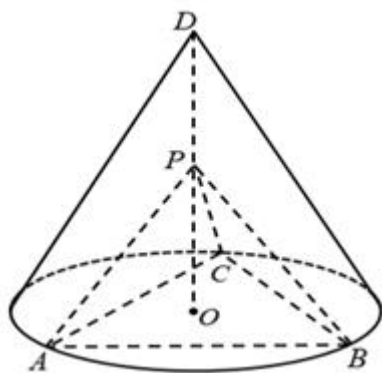
(2)方法一利用相似三角形求出矩形的另一个边长，从而求得该四棱锥的体积；

方法二构建平面直角坐标系，利用直线垂直的条件得到矩形的另一个边长，从而求得该四棱锥的体积；

方法三直接利用空间直角坐标系和空间向量的垂直的坐标运算求得矩形的另一个边长,为最常用的通性通法，为最优解；

方法四利用空间向量转化求得矩形的另一边长.

5. 【2020 年新课标 1 卷文科】如图， D 为圆锥的顶点， O 是圆锥底面的圆心， $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形， P 为 DO 上一点， $\angle APC=90^\circ$.



(1) 证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ；

(2) 设 $DO=\sqrt{2}$ ，圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$ ，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

【答案】(1) 证明见解析；(2) $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

【解析】

【分析】

(1) 根据已知可得 $PA=PB=PC$ ，进而有 $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ ，可得

$\angle APC = \angle BPC = 90^\circ$ ，即 $PB \perp PC$ ，从而证得 $PC \perp$ 平面 PAB ，即可证得结论；

(2) 将已知条件转化为母线 l 和底面半径 r 的关系，进而求出底面半径，由正弦定理，求出正三角形 ABC 边长，在等腰直角三角形 APC 中求出 AP ，在 $Rt\triangle APO$ 中，求出 PO ，即可求出结论.

【详解】

(1) 连接 OA, OB, OC ， $\because D$ 为圆锥顶点， O 为底面圆心， $\therefore OD \perp$ 平面 ABC ，

$\therefore P$ 在 DO 上， $OA=OB=OC, \therefore PA=PB=PC$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是圆内接正三角形， $\therefore AC=BC$ ， $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ ，

$\therefore \angle APC = \angle BPC = 90^\circ$ ，即 $PB \perp PC, PA \perp PC$ ，

$PA \cap PB = P, \therefore PC \perp$ 平面 $PAB, PC \subset$ 平面 PAC ， $\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ；

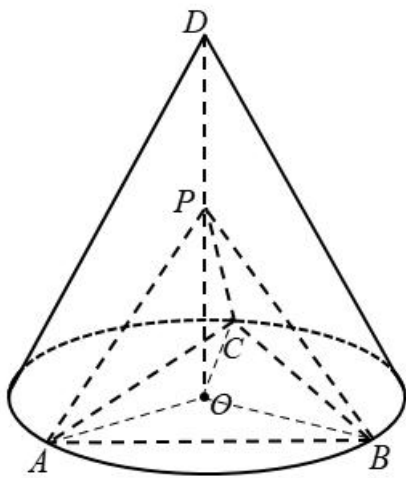
(2) 设圆锥的母线为 l ，底面半径为 r ，圆锥的侧面积为 $\pi rl = \sqrt{3}\pi, rl = \sqrt{3}$ ，

$OD^2 = l^2 - r^2 = 2$ ，解得 $r = 1, l = \sqrt{3}$ ， $AC = 2r \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

在等腰直角三角形 APC 中， $AP = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

在 $Rt\triangle PAO$ 中， $PO = \sqrt{AP^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

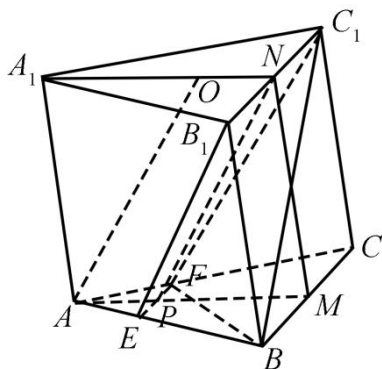
$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} PO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 = \frac{\sqrt{6}}{8}$ 。



【点睛】

本题考查空间线、面位置关系，证明平面与平面垂直，求锥体的体积，注意空间垂直间的相互转化，考查逻辑推理、直观想象、数学计算能力，属于中档题。

6. 【2020 年新课标 2 卷文科】如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形， M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点， P 为 AM 上一点。过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E ，交 AC 于 F 。



(1) 证明: $AA_1 // MN$, 且平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F ;

(2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 若 $AO=AB=6$, $AO //$ 平面 EB_1C_1F , 且 $\angle MPN = \frac{\pi}{3}$, 求四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 24.

【解析】

【分析】

(1) 由 M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, $MN // CC_1$, 根据条件可得 $AA_1 // BB_1$, 可证 $MN // AA_1$, 要证平面 $EB_1C_1F \perp$ 平面 A_1AMN , 只需证明 $EF \perp$ 平面 A_1AMN 即可;

(2) 根据已知条件求得 $S_{\text{四边形}EB_1C_1F}$ 和 M 到 PN 的距离, 根据椎体体积公式, 即可求得 $V_{B-EB_1C_1F}$.

【详解】

(1) $\because M, N$ 分别为 BC, B_1C_1 的中点,

$$\therefore MN // BB_1$$

$$\text{又 } AA_1 // BB_1$$

$$\therefore MN // AA_1$$

在等边 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 中点, 则 $BC \perp AM$

又 $\because$ 侧面 BB_1C_1C 为矩形,

$$\therefore BC \perp BB_1$$

$$\because MN // BB_1$$

$$MN \perp BC$$

由 $MN \cap AM = M$, $MN, AM \subset$ 平面 A_1AMN

$$\therefore BC \perp \text{平面 } A_1AMN$$

又 $\because B_1C_1 // BC$, 且 $B_1C_1 \not\subset$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

$$\therefore B_1C_1 // \text{平面 } ABC$$

又 $\because B_1C_1 \subset$ 平面 EB_1C_1F , 且平面 $EB_1C_1F \cap$ 平面 $ABC = EF$

$$\therefore B_1C_1 // EF$$

又 $\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中 $\frac{EF}{BC} = \frac{AP}{AM}$

$$\text{即 } EF = \frac{AP \cdot BC}{AM} = \frac{\sqrt{3} \times 6}{3\sqrt{3}} = 2$$

由(1)知, 四边形 EB_1C_1F 为梯形

$$\therefore \text{四边形 } EB_1C_1F \text{ 的面积为: } S_{\text{四边形 } EB_1C_1F} = \frac{EF + B_1C_1}{2} \cdot NP = \frac{2+6}{2} \times 6 = 24$$

$$\therefore V_{B-EB_1C_1F} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形 } EB_1C_1F} \cdot h,$$

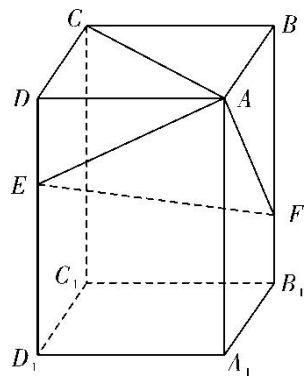
$$h \text{ 为 } M \text{ 到 } PN \text{ 的距离 } MH = 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 3,$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times 24 \times 3 = 24.$$

【点睛】

本题主要考查了证明线线平行和面面垂直, 及其求四棱锥的体积, 解题关键是掌握面面垂直转为求证线面垂直的证法和棱锥的体积公式, 考查了分析能力和空间想象能力, 属于中档题.

7. 【2020 年新课标 3 卷文科】如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE = ED_1, BF = 2FB_1$. 证明:



(1) 当 $AB = BC$ 时, $EF \perp AC$;

(2) 点 C_1 在平面 AEF 内.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

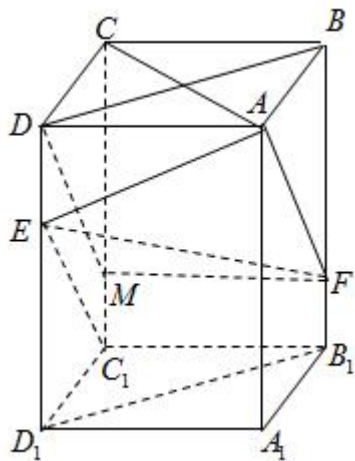
【解析】

【分析】

(1) 根据正方形性质得 $AC \perp BD$, 根据长方体性质得 $AC \perp BB_1$, 进而可证 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D , 即得结果;

(2) 只需证明 $EC_1 \parallel AF$ 即可, 在 CC_1 上取点 M 使得 $CM = 2MC_1$, 再通过平行四边形性质进行证明即可.

【详解】



(1) 因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 所以 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD \therefore AC \perp BB_1$,

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB = BC$, 所以四边形 $ABCD$ 为正方形 $\therefore AC \perp BD$

因为 $BB_1 \perp BD = B$, BB_1 、 $BD \subset$ 平面 BB_1D_1D , 因此 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D ,

因为 $EF \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $AC \perp EF$;

(2) 在 CC_1 上取点 M 使得 $CM = 2MC_1$, 连 DM , MF ,

因为 $D_1E = 2ED$, $DD_1 \parallel CC_1$, $DD_1 = CC_1$, 所以 $ED = MC_1$, $ED \parallel MC_1$,

所以四边形 DMC_1E 为平行四边形, $\therefore DM \parallel EC_1$

因为 $MF \parallel DA$, $MF = DA$, 所以 M 、 F 、 A 、 D 四点共面, 所以四边形 $MFAD$ 为平行四边形,

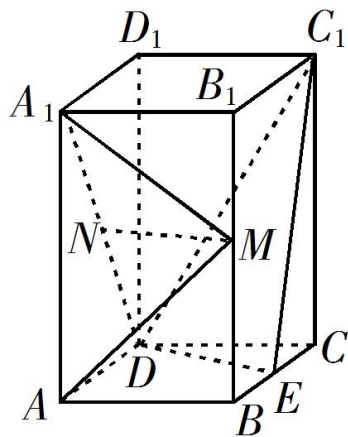
$\therefore DM \parallel AF$, $\therefore EC_1 \parallel AF$, 所以 E 、 C_1 、 A 、 F 四点共面,

因此 C_1 在平面 AEF 内

【点睛】

本题考查线面垂直判定定理、线线平行判定, 考查基本分析论证能力, 属中档题.

8. 【2019 年新课标 1 卷文科】如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E , M , N 分别是 BC , BB_1 , A_1D_1 的中点.



- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 $C1DE$;
 (2) 求点 C 到平面 $C1DE$ 的距离.

【答案】(1) 见解析;

(2) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

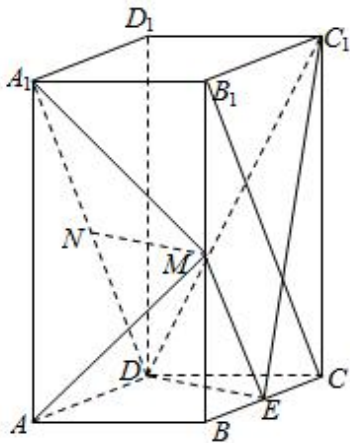
【解析】

【分析】

- (1) 利用三角形中位线和 $A1D \parallel B1C$ 可证得 $ME \parallel ND$, 证得四边形 $MNDE$ 为平行四边形, 进而证得 $MN \parallel DE$, 根据线面平行判定定理可证得结论;
 (2) 根据题意求得三棱锥 $C1-CDE$ 的体积, 再求出 $\Delta C1DE$ 的面积, 利用 $V_{C1-CDE} = V_{C-C1DE}$ 求得点 C 到平面 $C1DE$ 的距离, 得到结果.

【详解】

- (1) 连接 ME , $B1C$



$\therefore M, E$ 分别为 BB_1, BC 中点 $\therefore ME$ 为 $\triangle BB_1C$ 的中位线

$\therefore ME \parallel B_1C$ 且 $ME = \frac{1}{2} B_1C$

又 N 为 A_1D 中点, 且 $A_1D \parallel B_1C \therefore ND \parallel B_1C$ 且 $ND = \frac{1}{2} B_1C$

$\therefore ME \parallel ND \therefore$ 四边形 $MNDE$ 为平行四边形

$\therefore MN \parallel DE$, 又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE , $DE \subset$ 平面 C_1DE

$\therefore MN \parallel$ 平面 C_1DE

(2) 在菱形 $ABCD$ 中, E 为 BC 中点, 所以 $DE \perp BC$,

根据题意有 $DE = \sqrt{3}$, $C_1E = \sqrt{17}$,

因为棱柱为直棱柱, 所以有 $DE \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $DE \perp EC_1$, 所以 $S_{\triangle DEC_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{17}$,

设点 C 到平面 C_1DE 的距离为 d ,

根据题意有 $V_{C_1-CDE} = V_{C-C_1DE}$, 则有 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{17} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 4$,

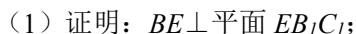
解得 $d = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,

所以点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

【点睛】

该题考查的是有关立体几何的问题, 涉及到的知识点有线面平行的判定, 点到平面的距离的求解, 在解题的过程中, 注意要熟记线面平行的判定定理的内容, 注意平行线的寻找思路, 再者就是利用等积法求点到平面的距离是文科生常考的内容.

9. 【2019 年新课标 2 卷文科】如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.



【答案】 (1) 见详解; (2) 18

【分析】

(2) 先设长方体侧棱长为 $2a$ ，根据题中条件求出 $a=3$ ；再取 BB_1 中点 F ，连结 EF ，证明 $EF \perp$ 平面 BB_1C_1C ，根据四棱锥的体积公式，即可求出结果.

【详解】

$BE \subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $B_1C_1 \perp BE$,

所以 $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ;

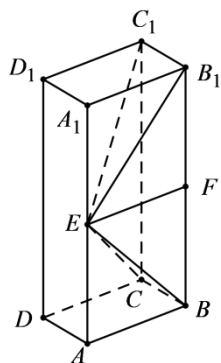
由(1)可得 $EB_1 \perp BE$ ；所以 $EB_1^2 + BE^2 = BB_1^2$ ，即 $2BE^2 = BB_1^2$ ，

又 $AB=3$ ，所以 $2AE^2+2AB^2=BB_1^2$ ，即 $2a^2+18=4a^2$ ，解得 $a=3$ ；

取 BB_1 中点 F ，连结 EF ，因为 $AE = A_1E$ ，则 $EF \parallel AB$ ；

所以 $EF \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

所以四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积为 $V_{E-BB_1C_1C} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形} BB_1C_1C} \cdot EF = \frac{1}{3} \cdot BC \cdot BB_1 \cdot EF = \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \times 3 = 18$.



【点睛】

本题主要考查线面垂直的判定，依据四棱锥的体积，熟记线面垂直的判定定理，以及四棱锥的体积公式即可，属于基础题型.

10. 【2019 年新课标 3 卷文科】图 1 是由矩形 $ADEB$, $Rt\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$ ，将其沿 AB, BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG ，如图 2.

- (1) 证明图 2 中的 A, C, G, D 四点共面，且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$ ；
- (2) 求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积.

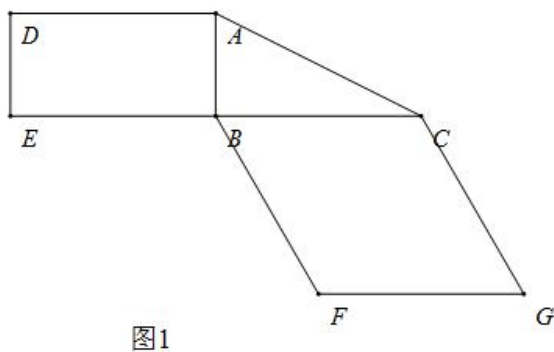


图1

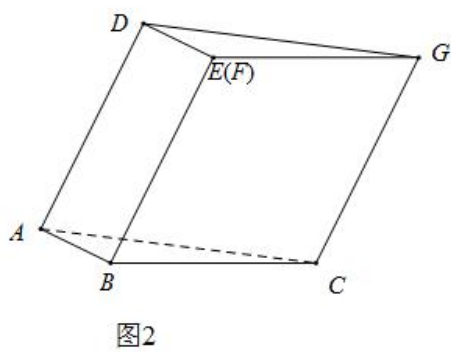


图2

【答案】 (1) 见详解； (2) 4.

【解析】

【分析】

(1) 因为折纸和粘合不改变矩形 $ABED$ ， $Rt\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 内部的夹角，所以 $AD \parallel BE$ ， $BF \parallel CG$ 依然成立，又因 E 和 F 粘在一起，所以得证. 因为 AB 是平面 $BCGE$ 垂线，所以易证. (2) 欲求四边形 $ACGD$ 的面积，需求出 CG 所对应的高，然后乘以 CG 即可.

【详解】

(1)证: $\because AD \parallel BE, BF \parallel CG$, 又因为 E 和 F 粘在一起.

$\therefore AD \parallel CG$, A, C, G, D 四点共面.

又 $\because AB \perp BE, AB \perp BC$.

$\therefore AB \perp$ 平面 $BCGE$, $\because AB \subset$ 平面 ABC , $\therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$, 得证.

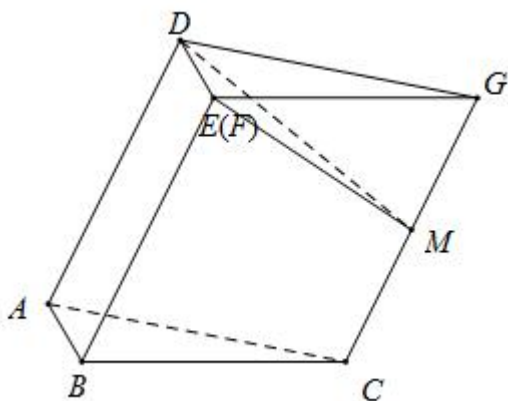
(2)取 CG 的中点 M , 连结 EM, DM . 因为 $AB \parallel DE$, $AB \perp$ 平面 $BCGE$, 所以 $DE \perp$ 平面 $BCGE$, 故 $DE \perp CG$,

由已知, 四边形 $BCGE$ 是菱形, 且 $\angle EBC = 60^\circ$ 得 $EM \perp CG$, 故 $CG \perp$ 平面 DEM .

因此 $DM \perp CG$.

在 $Rt\triangle DEM$ 中, $DE=1$, $EM=\sqrt{3}$, 故 $DM=2$.

所以四边形 $ACGD$ 的面积为 4.



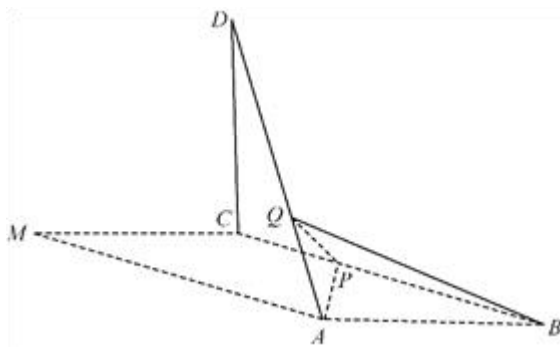
【点睛】

很新颖的立体几何考题. 首先是多面体粘合问题, 考查考生在粘合过程中哪些量是不变的. 再者粘合后的多面体不是直棱柱, 最后将求四边形 $ACGD$ 的面积考查考生的空间想象能力.

11. 【2018 年新课标 1 卷文科】如图, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB = AC = 3$, $\angle ACM = 90^\circ$, 以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点 M 到达点 D 的位置, 且 $AB \perp DA$.

(1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;

(2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点, 且 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$, 求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.



【答案】(1)见解析.

(2)1.

【解析】

【详解】

分析：(1)首先根据题的条件，可以得到 $\angle BAC=90^\circ$ ，即 $BA \perp AC$ ，再结合已知条件 $BA \perp AD$ ，利用线面垂直的判定定理证得 $AB \perp$ 平面 ACD ，又因为 $AB \subset$ 平面 ABC ，根据面面垂直的判定定理，证得平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ；

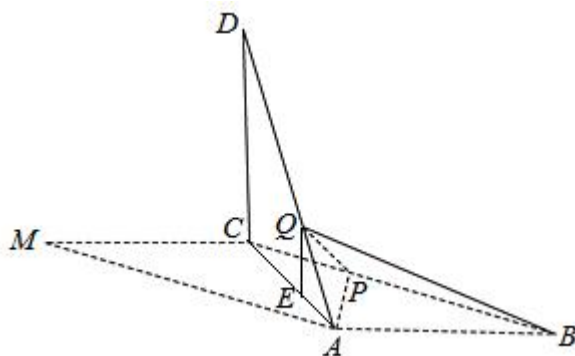
(2)根据已知条件，求得相关的线段的长度，根据第一问的相关垂直的条件，求得三棱锥的高，之后借助于三棱锥的体积公式求得三棱锥的体积.

详解：(1)由已知可得， $\angle BAC=90^\circ$ ， $BA \perp AC$.

又 $BA \perp AD$ ，且 $AC \cap AD = A$ ，所以 $AB \perp$ 平面 ACD .

又 $AB \subset$ 平面 ABC ，

所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC .



(2)由已知可得， $DC=CM=AB=3$ ， $DA=3\sqrt{2}$.

又 $BP=DQ=\frac{2}{3}DA$ ，所以 $BP=2\sqrt{2}$.

作 $QE \perp AC$ ，垂足为 E ，则 $QE = \frac{1}{3}DC$.

由已知及 (1) 可得 $DC \perp$ 平面 ABC ，所以 $QE \perp$ 平面 ABC ， $QE=1$.

因此，三棱锥 $Q-ABP$ 的体积为

$$V_{Q-ABP} = \frac{1}{3} \times QE \times S_{\triangle ABP} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 1.$$

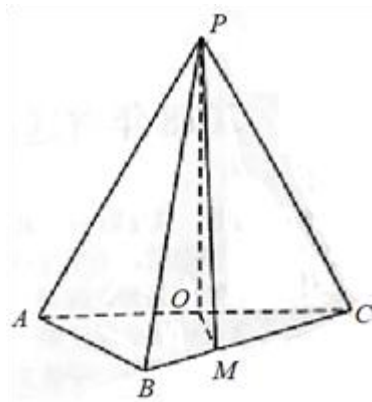
点睛：该题考查的是有关立体几何的问题，涉及到的知识点有面面垂直的判定以及三棱锥的体积的求解，在解题的过程中，需要清楚题中的有关垂直的直线的位置，结合线面垂直的判定定理证得线面垂直，之后应用面面垂直的判定定理证得面面垂直，需要明确线线垂直、线面垂直和面面垂直的关系，在求三棱锥的体积的时候，注意应用体积公式求解即可。

12. 【2018 年新课标 2 卷文科】如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=BC=2\sqrt{2}$ ，

$PA=PB=PC=AC=4$ ， O 为 AC 的中点。

(1) 证明： $PO \perp$ 平面 ABC ；

(2) 若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$ ，求点 C 到平面 POM 的距离。



【答案】(1) 详见解析 (2) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【详解】

分析：(1) 连接 OB ，欲证 $PO \perp$ 平面 ABC ，只需证明 $PO \perp AC, PO \perp OB$ 即可；(2) 过点 C 作 $CH \perp OM$ ，垂足为 M ，只需论证 CH 的长即为所求，再利用平面几何知识求解即可。

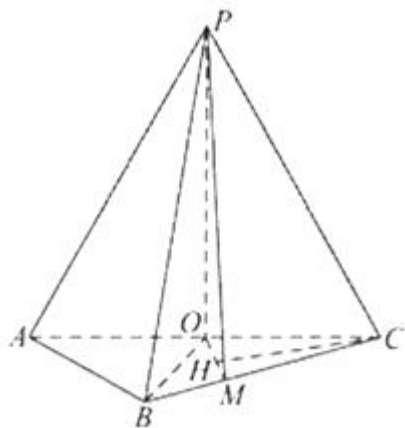
详解：(1) 因为 $AP=CP=AC=4$ ， O 为 AC 的中点，所以 $OP \perp AC$ ，且 $OP=2\sqrt{3}$ 。

连结 OB 。因为 $AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$ ，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $OB \perp AC$ ， $OB=\frac{1}{2}AC=$

2。

由 $OP^2 + OB^2 = PB^2$ 知， $OP \perp OB$ 。

由 $OP \perp OB$ ， $OP \perp AC$ 知 $PO \perp$ 平面 ABC 。



(2) 作 $CH \perp OM$, 垂足为 H . 又由 (1) 可得 $OP \perp CH$, 所以 $CH \perp$ 平面 POM .

故 CH 的长为点 C 到平面 POM 的距离.

由题设可知 $OC = \frac{1}{2}AC = 2$, $CM = \frac{2}{3}BC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\angle ACB = 45^\circ$.

所以 $OM = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, $CH = \frac{OC \cdot MC \cdot \sin \angle ACB}{OM} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

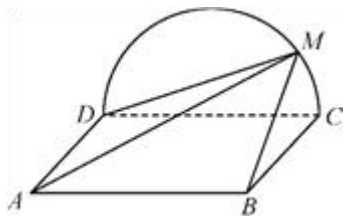
所以点 C 到平面 POM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

点睛: 立体几何解答题在高考中难度低于解析几何, 属于易得分题, 第一问多以线面的证明为主, 解题的核心是能将问题转化为线线关系的证明; 本题第二问可以通过作出点到平面的距离线段求解, 也可利用等体积法解决.

13. 【2018 年新课标 3 卷文科】如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\widehat{CD}$ 所在平面垂直, M 是 $\widehat{CD}$ 上异于 C, D 的点.

(1) 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;

(2) 在线段 AM 上是否存在点 P , 使得 $MC \parallel$ 平面 PBD ? 说明理由.



【答案】(1) 证明见解析

(2) 存在, 理由见解析

【解析】

【详解】

分析: (1) 先证 $AD \perp CM$, 再证 $CM \perp MD$, 进而完成证明.

(2) 判断出 P 为 AM 中点，，证明 $MC \parallel OP$ ，然后进行证明即可。

详解：(1) 由题设知，平面 $CMD \perp$ 平面 $ABCD$ ，交线为 CD 。

因为 $BC \perp CD$ ， $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $BC \perp$ 平面 CMD ，故 $BC \perp DM$ 。

因为 M 为 $\widehat{CD}$ 上异于 C, D 的点，且 DC 为直径，所以 $DM \perp CM$ 。

又 $BC \cap CM = C$ ，所以 $DM \perp$ 平面 BMC 。

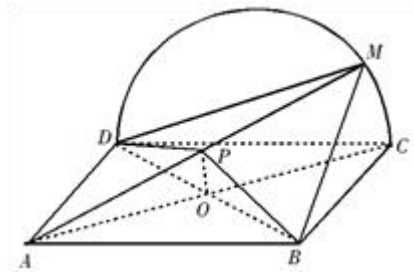
而 $DM \subset$ 平面 AMD ，故平面 $AMD \perp$ 平面 BMC 。

(2) 当 P 为 AM 的中点时， $MC \parallel$ 平面 PBD 。

证明如下：连结 AC 交 BD 于 O 。因为 $ABCD$ 为矩形，所以 O 为 AC 中点。

连结 OP ，因为 P 为 AM 中点，所以 $MC \parallel OP$ 。

$MC \not\subset$ 平面 PBD ， $OP \subset$ 平面 PBD ，所以 $MC \parallel$ 平面 PBD 。



点睛：本题主要考查面面垂直的证明，利用线线垂直得到线面垂直，再得到面面垂直，第二问先断出 P 为 AM 中点，然后作辅助线，由线线平行得到线面平行，考查学生空间想象能力，属于中档题。

