

## 专题 05 立体几何（选填题）（理科专用）

1. 【2022 年新高考 1 卷】南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为  $140.0\text{km}^2$ ；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为  $180.0\text{km}^2$ ，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为 ( $\sqrt{7} \approx 2.65$ ) ( )

- A.  $1.0 \times 10^9 \text{m}^3$       B.  $1.2 \times 10^9 \text{m}^3$       C.  $1.4 \times 10^9 \text{m}^3$       D.  $1.6 \times 10^9 \text{m}^3$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意只要求出棱台的高，即可利用棱台的体积公式求出.

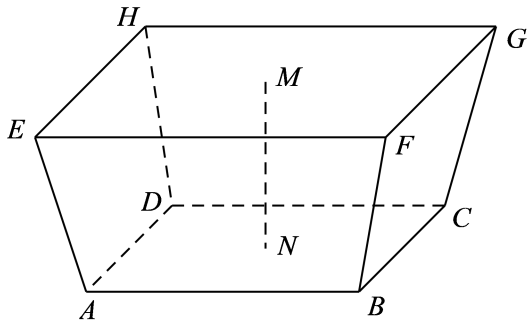
【详解】

依题意可知棱台的高为  $MN = 157.5 - 148.5 = 9(\text{m})$ ，所以增加的水量即为棱台的体积  $V$ .

棱台上底面积  $S = 140.0\text{km}^2 = 140 \times 10^6 \text{m}^2$ ，下底面积  $S' = 180.0\text{km}^2 = 180 \times 10^6 \text{m}^2$ ，

$$\therefore V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'}) = \frac{1}{3} \times 9 \times (140 \times 10^6 + 180 \times 10^6 + \sqrt{140 \times 180 \times 10^{12}})$$

$$= 3 \times (320 + 60\sqrt{7}) \times 10^6 \approx (96 + 18 \times 2.65) \times 10^7 = 1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9 (\text{m}^3).$$



故选：C.

2. 【2022 年新高考 1 卷】已知正四棱锥的侧棱长为  $l$ ，其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为  $36\pi$ ，且  $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ ，则该正四棱锥体积的取值范围是 ( )

- A.  $\left[18, \frac{81}{4}\right]$       B.  $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$       C.  $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$       D.  $[18, 27]$

【答案】C

【解析】

【分析】

设正四棱锥的高为 $h$ ，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【详解】

$\because$  球的体积为  $36\pi$ ，所以球的半径  $R = 3$ ，

设正四棱锥的底面边长为  $2a$ ，高为  $h$ ，

$$\text{则 } l^2 = 2a^2 + h^2, \quad 3^2 = 2a^2 + (3-h)^2,$$

$$\text{所以 } 6h = l^2, \quad 2a^2 = l^2 - h^2$$

$$\text{所以正四棱锥的体积 } V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4a^2 \times h = \frac{2}{3} \times (l^2 - \frac{l^4}{36}) \times \frac{l^2}{6} = \frac{1}{9} \left( l^4 - \frac{l^6}{36} \right),$$

$$\text{所以 } V' = \frac{1}{9} \left( 4l^3 - \frac{l^5}{6} \right) = \frac{1}{9} l^3 \left( \frac{24-l^2}{6} \right),$$

当  $3 \leq l \leq 2\sqrt{6}$  时， $V' > 0$ ，当  $2\sqrt{6} < l \leq 3\sqrt{3}$  时， $V' < 0$ ，

所以当  $l = 2\sqrt{6}$  时，正四棱锥的体积  $V$  取最大值，最大值为  $\frac{64}{3}$ ，

$$\text{又 } l = 3 \text{ 时， } V = \frac{27}{4}, \quad l = 3\sqrt{3} \text{ 时， } V = \frac{81}{4},$$

所以正四棱锥的体积  $V$  的最小值为  $\frac{27}{4}$ ，

所以该正四棱锥体积的取值范围是  $\left[ \frac{27}{4}, \frac{64}{3} \right]$ .

故选：C.

3. 【2022 年新高考 2 卷】已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为  $3\sqrt{3}$  和  $4\sqrt{3}$ ，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ ）

A.  $100\pi$

B.  $128\pi$

C.  $144\pi$

D.  $192\pi$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据题意可求出正三棱台上下底面所在圆面的半径  $r_1, r_2$ ，再根据球心距，圆面半径，以及球的半径之间的关系，即可解出球的半径，从而得出球的表面积.

【详解】

$$\text{设正三棱台上下底面所在圆面的半径 } r_1, r_2, \text{ 所以 } 2r_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, 2r_2 = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, \text{ 即 } r_1 = 3, r_2 = 4,$$

$$\text{设球心到上下底面的距离分别为 } d_1, d_2, \text{ 球的半径为 } R, \text{ 所以 } d_1 = \sqrt{R^2 - 9}, d_2 = \sqrt{R^2 - 16},$$

$$\text{故 } |d_1 - d_2| = 1 \text{ 或 } d_1 + d_2 = 1, \text{ 即 } |\sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16}| = 1 \text{ 或 } \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} = 1, \text{ 解}$$

故选：A.

A diagram of a triangular prism. The top triangular face has vertices labeled  $A$ ,  $B$ , and  $C$ . The bottom triangular face has vertices labeled  $A'$ ,  $B'$ , and  $C'$ . A dashed line segment connects vertex  $A$  to vertex  $A'$ , representing the height of the prism. The edges  $AA'$ ,  $BB'$ , and  $CC'$  are parallel and represent the height of the prism.

- A. 346                      B. 373                      C. 446                      D. 473

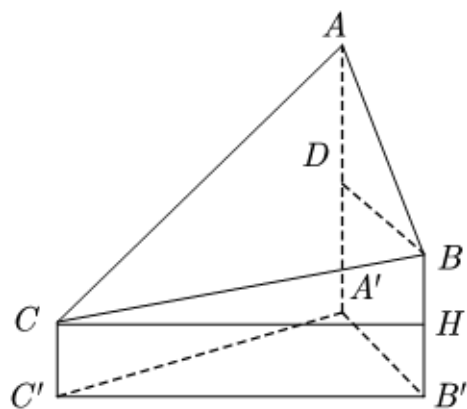
**【答案】 B**

**【解析】**

**【分析】**

通过做辅助线，将已知所求量转化到一个三角形中，借助正弦定理，求得  $A'B'$ ，进而得到答案.

**【详解】**



过  $C$  作  $CH \perp BB'$ , 过  $B$  作  $BD \perp AA'$ ,

故  $AA' - CC' = AA' - (BB' - BH) = AA' - BB' + 100 = AD + 100$ ,

由题, 易知  $\triangle ADB$  为等腰直角三角形, 所以  $AD = DB$ .

所以  $AA' - CC' = DB + 100 = A'B' + 100$ .

因为  $\angle BCH = 15^\circ$ , 所以  $CH = C'B' = \frac{100}{\tan 15^\circ}$

在  $\triangle A'B'C'$  中, 由正弦定理得:

$$\frac{A'B'}{\sin 45^\circ} = \frac{C'B'}{\sin 75^\circ} = \frac{100}{\tan 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{100}{\sin 15^\circ},$$

而  $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,

所以  $A'B' = \frac{100 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 100(\sqrt{3} + 1) \approx 273$ ,

所以  $AA' - CC' = A'B' + 100 \approx 373$ .

故选: B.

【点睛】

本题关键在于如何正确将  $AA' - CC'$  的长度通过作辅助线的方式转化为  $A'B' + 100$ .

5. 【2021 年甲卷理科】已知  $A, B, C$  是半径为 1 的球  $O$  的球面上的三个点, 且

$AC \perp BC, AC = BC = 1$ , 则三棱锥  $O - ABC$  的体积为 ( )

A.  $\frac{\sqrt{2}}{12}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】

由题可得  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形, 得出  $\triangle ABC$  外接圆的半径, 则可求得  $O$  到平面  $ABC$  的距离, 进而求得体积.

【详解】

$\because AC \perp BC, AC = BC = 1$ ,  $\therefore \triangle ABC$  为等腰直角三角形,  $\therefore AB = \sqrt{2}$ ,

则  $\triangle ABC$  外接圆的半径为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 又球的半径为 1,

设  $O$  到平面  $ABC$  的距离为  $d$ ,

$$\text{则 } d = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

---

所以  $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ .

故选：A.

【点睛】

关键点睛：本题考查球内几何体问题，解题的关键是正确利用截面圆半径、球半径、球心到截面距离的勾股关系求解.

6. 【2021 年新高考 1 卷】已知圆锥的底面半径为  $\sqrt{2}$ ，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（ ）

- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C. 4                      D.  $4\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

设圆锥的母线长为  $l$ ，根据圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长可求得  $l$  的值，即为所求.

【详解】

设圆锥的母线长为  $l$ ，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则  $\pi l = 2\pi \times \sqrt{2}$ ，解得  $l = 2\sqrt{2}$ .

故选：B.

7. 【2021 年新高考 2 卷】正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则其体积为（ ）

- A.  $20 + 12\sqrt{3}$                       B.  $28\sqrt{2}$                       C.  $\frac{56}{3}$                       D.  $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

【答案】D

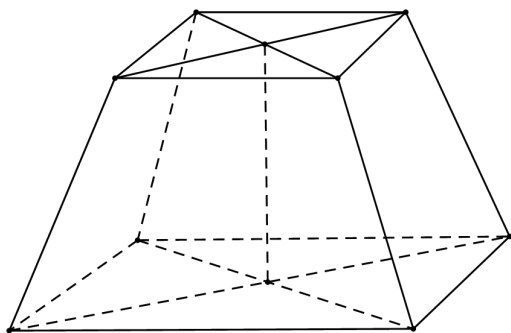
【解析】

【分析】

由四棱台的几何特征算出该几何体的高及上下底面面积，再由棱台的体积公式即可得解.

【详解】

作出图形，连接该正四棱台上下底面的中心，如图，



因为该四棱台上下底面边长分别为 2，4，侧棱长为 2，

所以该棱台的高  $h = \sqrt{2^2 - (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$ ，

下底面面积  $S_1 = 16$ ，上底面面积  $S_2 = 4$ ，

所以该棱台的体积  $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times (16 + 4 + \sqrt{64}) = \frac{28}{3}\sqrt{2}$ 。

故选：D。

8. 【2020 年新课标 1 卷理科】埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（ ）



A.  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

设  $CD = a, PE = b$ ，利用  $PO^2 = \frac{1}{2}CD \cdot PE$  得到关于  $a, b$  的方程，解方程即可得到答案。

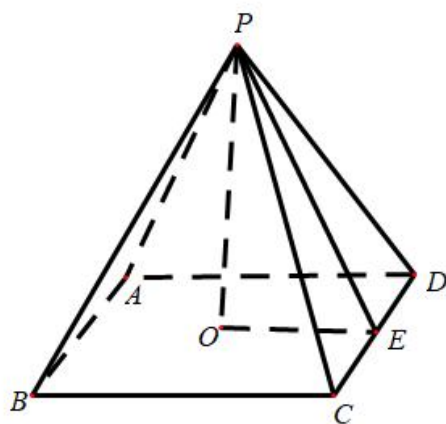
【详解】

如图，设  $CD = a, PE = b$ ，则  $PO = \sqrt{PE^2 - OE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ ，

由题意  $PO^2 = \frac{1}{2}ab$ ，即  $b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}ab$ ，化简得  $4(\frac{b}{a})^2 - 2 \cdot \frac{b}{a} - 1 = 0$ ，

解得  $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  (负值舍去) .

故选: C.



【点睛】

本题主要考查正四棱锥的概念及其有关计算, 考查学生的数学计算能力, 是一道容易题.

9. 【2020 年新课标 1 卷理科】已知  $A, B, C$  为球  $O$  的球面上的三个点,  $\odot O_1$  为  $\triangle ABC$  的外接

圆, 若  $\odot O_1$  的面积为  $4\pi$ ,  $AB = BC = AC = OO_1$ , 则球  $O$  的表面积为 ( )

A.  $64\pi$

B.  $48\pi$

C.  $36\pi$

D.  $32\pi$

【答案】A

【解析】

【分析】

由已知可得等边  $\triangle ABC$  的外接圆半径, 进而求出其边长, 得出  $OO_1$  的值, 根据球的截面性质, 求出球的半径, 即可得出结论.

【详解】

设圆  $O_1$  半径为  $r$ , 球的半径为  $R$ , 依题意,

得  $\pi r^2 = 4\pi, \therefore r = 2$ ,  $\because \triangle ABC$  为等边三角形,

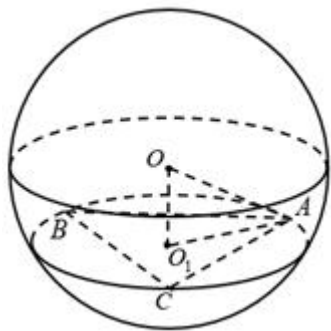
由正弦定理可得  $AB = 2r \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore OO_1 = AB = 2\sqrt{3}$ , 根据球的截面性质  $OO_1 \perp$  平面  $ABC$ ,

$\therefore OO_1 \perp O_1A, R = OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{OO_1^2 + r^2} = 4$ ,

$\therefore$  球  $O$  的表面积  $S = 4\pi R^2 = 64\pi$ .

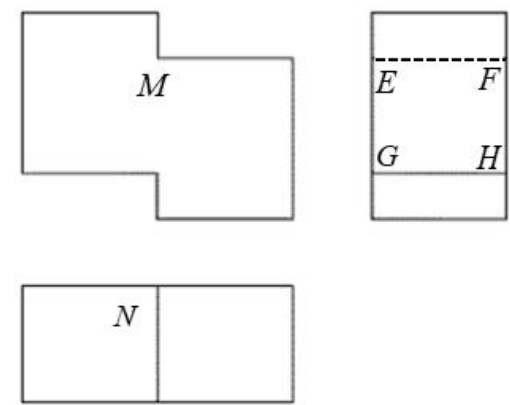
故选：A



【点睛】

本题考查球的表面积，应用球的截面性质是解题的关键，考查计算求解能力，属于基础题.

10. 【2020 年新课标 2 卷理科】如图是一个多面体的三视图，这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为  $M$ ，在俯视图中对应的点为  $N$ ，则该端点在侧视图中对应的点为（ ）



- A.  $E$                       B.  $F$                       C.  $G$                       D.  $H$

【答案】A

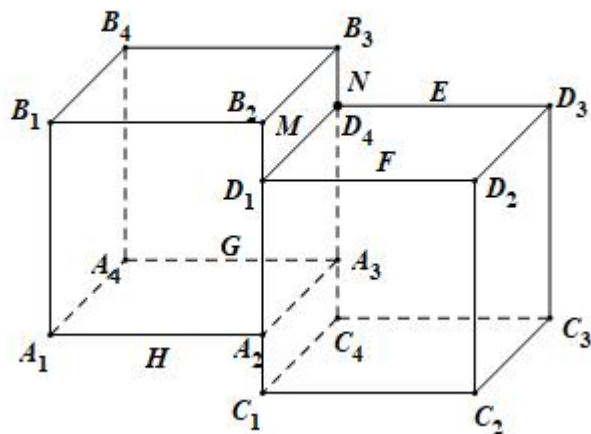
【解析】

【分析】

根据三视图，画出多面体立体图形，即可求得  $M$  点在侧视图中对应的点.

【详解】

根据三视图，画出多面体立体图形，



$D_1D_4$ 上的点在正视图中都对应点  $M$ ,直线  $B_3C_4$ 上的点在俯视图中对应的点为  $N$ ,

$\therefore$ 在正视图中对应  $M$ ,在俯视图中对应  $N$  的点是  $D_4$ ,线段  $D_3D_4$ 上的所有点在侧视图都对应  $E$ , $\therefore$ 点  $D_4$ 在侧视图对应的点为  $E$ .

故选: A

【点睛】

本题主要考查了根据三视图判断点的位置,解题关键是掌握三视图的基础知识和根据三视图能还原立体图形的方法,考查了分析能力和空间想象,属于基础题.

11. 【2020 年新课标 2 卷理科】已知 $\triangle ABC$  是面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形,且其顶点都在球  $O$  的球面上.若球  $O$  的表面积为  $16\pi$ ,则  $O$  到平面  $ABC$  的距离为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C. 1                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

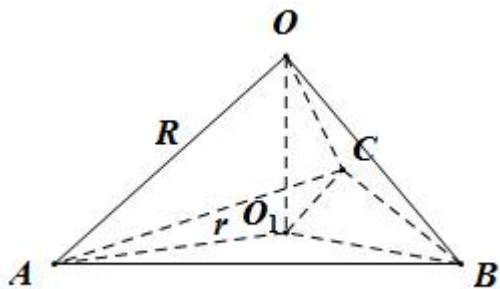
【答案】C

【解析】

【分析】

根据球  $O$  的表面积和 $\triangle ABC$  的面积可求得球  $O$  的半径  $R$  和 $\triangle ABC$  外接圆半径  $r$ ,由球的性质可知所求距离  $d = \sqrt{R^2 - r^2}$ .

【详解】



设球  $O$  的半径为  $R$ ，则  $4\pi R^2 = 16\pi$ ，解得：  $R = 2$ 。

设  $\triangle ABC$  外接圆半径为  $r$ ，边长为  $a$ ，

$\because \triangle ABC$  是面积为  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$  的等边三角形，

$$\therefore \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得: } a=3, \therefore r = \frac{2}{3} \times \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{3} \times \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{3},$$

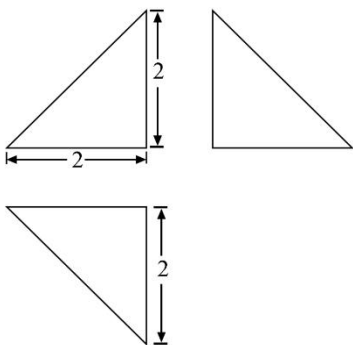
$\therefore$  球心  $O$  到平面  $ABC$  的距离  $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查球的相关问题的求解，涉及到球的表面积公式和三角形面积公式的应用；解题关键是明确球的性质，即球心和三角形外接圆圆心的连线必垂直于三角形所在平面。

12. 【2020 年新课标 3 卷理科】下图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（ ）



A.  $6+4\sqrt{2}$

B.  $4+4\sqrt{2}$

C.  $6+2\sqrt{3}$

D.  $4+2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

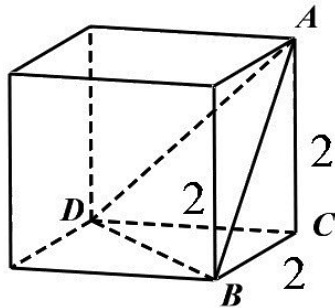
【分析】

根据三视图特征，在正方体中截取出符合题意的立体图形，求出每个面的面积，即可求得其

表面积.

【详解】

根据三视图特征，在正方体中截取出符合题意的立体图形



根据立体图形可得：  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

根据勾股定理可得：  $AB = AD = DB = 2\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ADB$  是边长为  $2\sqrt{2}$  的等边三角形

根据三角形面积公式可得：

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$  该几何体的表面积是：  $3 \times 2 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}$  .

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了根据三视图求立体图形的表面积问题，解题关键是掌握根据三视图画出立体图形，考查了分析能力和空间想象能力，属于基础题.

13. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球(球心记为  $O$ )，地球上一点  $A$  的纬度是指  $OA$  与地球赤道所在平面所成角，点  $A$  处的水平面是指过点  $A$  且与  $OA$  垂直的平面. 在点  $A$  处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点  $A$  处的纬度为北纬  $40^\circ$ ，则晷针与点  $A$  处的水平面所成角为 ( )



A.  $20^\circ$

B.  $40^\circ$

C.  $50^\circ$

D.  $90^\circ$

【答案】B

【解析】

【分析】

画出过球心和晷针所确定的平面截地球和晷面的截面图，根据面面平行的性质定理和线面垂直的定义判定有关截线的关系，根据点A处的纬度，计算出晷针与点A处的水平面所成角.

【详解】

画出截面图如下图所示，其中 $CD$ 是赤道所在平面的截线； $l$ 是点A处的水平面的截线，依题意可知 $OA \perp l$ ； $AB$ 是晷针所在直线. $m$ 是晷面的截线，依题意依题意,晷面和赤道平面平行，晷针与晷面垂直，

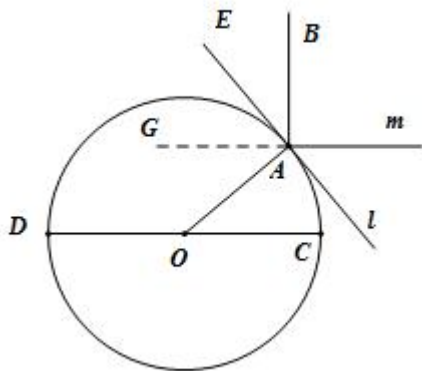
根据平面平行的性质定理可得可知 $m \parallel CD$ 、根据线面垂直的定义可得 $AB \perp m$ ..

由于 $\angle AOC = 40^\circ, m \parallel CD$ ，所以 $\angle OAG = \angle AOC = 40^\circ$ ，

由于 $\angle OAG + \angle GAE = \angle BAE + \angle GAE = 90^\circ$ ，

所以 $\angle BAE = \angle OAG = 40^\circ$ ，也即晷针与点A处的水平面所成角为 $\angle BAE = 40^\circ$ .

故选：B



【点睛】

本小题主要考查中国古代数学文化，考查球体有关计算，涉及平面平行，线面垂直的性质，属于中档题.

14. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知三棱锥  $P-ABC$  的四个顶点在球  $O$  的球面上,  $PA=PB=PC$ ,  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形,  $E, F$  分别是  $PA, AB$  的中点,  $\angle CEF=90^\circ$ , 则球  $O$  的体积为

A.  $8\sqrt{6}\pi$

B.  $4\sqrt{6}\pi$

C.  $2\sqrt{6}\pi$

D.  $\sqrt{6}\pi$

**【答案】D****【解析】****【分析】**

先证得  $PB \perp$  平面  $PAC$ ，再求得  $PA = PB = PC = \sqrt{2}$ ，从而得  $P-ABC$  为正方体一部分，进而知正方体的体对角线即为球直径，从而得解.

**【详解】**

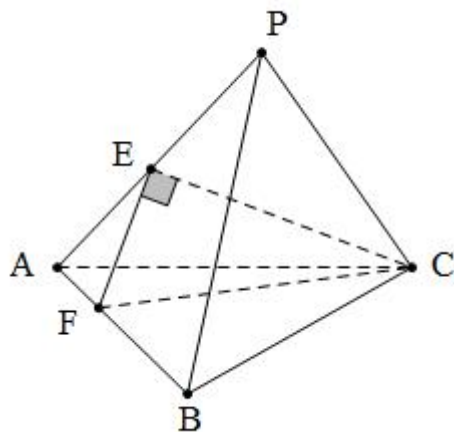
解法一： $\because PA = PB = PC$ ， $\triangle ABC$  为边长为 2 的等边三角形， $\therefore P-ABC$  为正三棱锥，

$\therefore PB \perp AC$ ，又  $E, F$  分别为  $PA, AB$  中点，

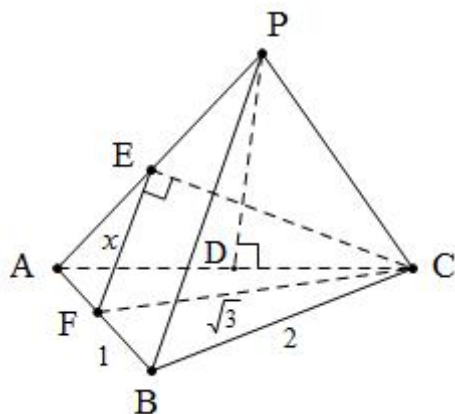
$\therefore EF \parallel PB$ ， $\therefore EF \perp AC$ ，又  $EF \perp CE$ ， $CE \cap AC = C$ ， $\therefore EF \perp$  平面  $PAC$ ， $PB \perp$  平面  $PAC$ ，

$\therefore \angle APB = 90^\circ$ ， $\therefore PA = PB = PC = \sqrt{2}$ ， $\therefore P-ABC$  为正方体一部分， $2R = \sqrt{2+2+2} = \sqrt{6}$ ，即

$R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{6\sqrt{6}}{8} = \sqrt{6}\pi$ ，故选 D.



解法二:



设  $PA = PB = PC = 2x$ ， $E, F$  分别为  $PA, AB$  中点，

$\therefore EF \parallel PB$ ，且  $EF = \frac{1}{2}PB = x$ ， $\because \triangle ABC$  为边长为 2 的等边三角形，

$\therefore CF = \sqrt{3}$  又  $\angle CEF = 90^\circ \therefore CE = \sqrt{3-x^2}$ ， $AE = \frac{1}{2}PA = x$

$\triangle AEC$  中余弦定理  $\cos \angle EAC = \frac{x^2 + 4 - (3-x^2)}{2 \times 2 \times x}$ ，作  $PD \perp AC$  于  $D$ ， $\because PA = PC$ ，

Q  $D$  为  $AC$  中点， $\cos \angle EAC = \frac{AD}{PA} = \frac{1}{2x}$ ， $\therefore \frac{x^2 + 4 - 3 + x^2}{4x} = \frac{1}{2x}$ ，

$\therefore 2x^2 + 1 = 2 \therefore x^2 = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore PA = PB = PC = \sqrt{2}$ ，又  $AB = BC = AC = 2$ ， $\therefore PA, PB, PC$

两两垂直， $\therefore 2R = \sqrt{2+2+2} = \sqrt{6}$ ， $\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{6\sqrt{6}}{8} = \sqrt{6}\pi$ ，故选 D.

【点睛】

本题考查学生空间想象能力，补体法解决外接球问题. 可通过线面垂直定理，得到三棱两两互相垂直关系，快速得到侧棱长，进而补体成正方体解决.

15. 【2019 年新课标 2 卷理科】设  $\alpha, \beta$  为两个平面，则  $\alpha \parallel \beta$  的充要条件是

- A.  $\alpha$  内有无数条直线与  $\beta$  平行
- B.  $\alpha$  内有两条相交直线与  $\beta$  平行
- C.  $\alpha, \beta$  平行于同一条直线
- D.  $\alpha, \beta$  垂直于同一平面

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断.

【详解】

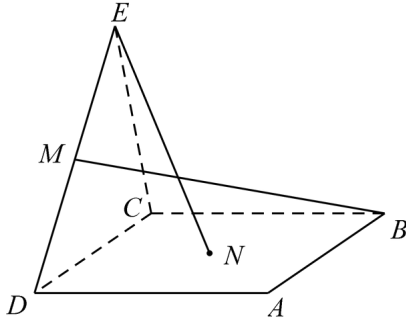
由面面平行的判定定理知： $\alpha$  内两条相交直线都与  $\beta$  平行是  $\alpha \parallel \beta$  的充分条件，由面面平行性质定理知，若  $\alpha \parallel \beta$ ，则  $\alpha$  内任意一条直线都与  $\beta$  平行，所以  $\alpha$  内两条相交直线都与  $\beta$  平行是  $\alpha \parallel \beta$  的必要条件，故选 B.

【点睛】

面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若  $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel b$ ，则  $\alpha \parallel \beta$ ”此类的错误.

16. 【2019 年新课标 3 卷理科】如图，点  $N$  为正方形  $ABCD$  的中心， $\triangle ECD$  为正三角形，

平面  $ECD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $M$  是线段  $ED$  的中点, 则



- A.  $BM = EN$ , 且直线  $BM, EN$  是相交直线
- B.  $BM \neq EN$ , 且直线  $BM, EN$  是相交直线
- C.  $BM = EN$ , 且直线  $BM, EN$  是异面直线
- D.  $BM \neq EN$ , 且直线  $BM, EN$  是异面直线

【答案】B

【解析】

利用垂直关系, 再结合勾股定理进而解决问题.

【详解】

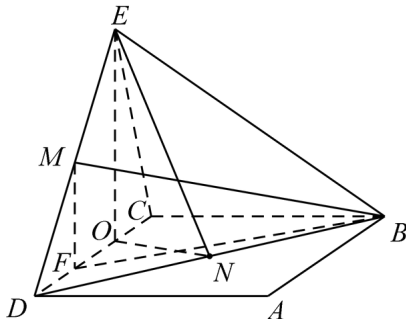
如图所示, 作  $EO \perp CD$  于  $O$ , 连接  $ON$ , 过  $M$  作  $MF \perp OD$  于  $F$ .

连  $BF$ ,  $\because$  平面  $CDE \perp$  平面  $ABCD$ .

$EO \perp CD, EO \subset$  平面  $CDE$ ,  $\therefore EO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $MF \perp$  平面  $ABCD$ ,

$\therefore \triangle MFB$  与  $\triangle EON$  均为直角三角形. 设正方形边长为 2, 易知  $EO = \sqrt{3}$ ,  $ON = 1$   $EN = 2$ ,

$MF = \frac{\sqrt{3}}{2}, BF = \frac{5}{2}, \therefore BM = \sqrt{7}$ .  $\therefore BM \neq EN$ , 故选 B.

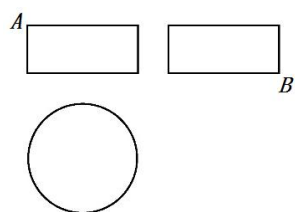


【点睛】

本题考查空间想象能力和计算能力, 解答本题的关键是构造直角三角形.

17. 【2018 年新课标 1 卷理科】某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图所示, 圆

柱表面上的点  $M$  在正视图上的对应点为  $A$ ，圆柱表面上的点  $N$  在左视图上的对应点为  $B$ ，则在此圆柱侧面上，从  $M$  到  $N$  的路径中，最短路径的长度为



- A.  $2\sqrt{17}$       B.  $2\sqrt{5}$       C. 3      D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】

首先根据题中所给的三视图，得到点  $M$  和点  $N$  在圆柱上所处的位置，将圆柱的侧面展开图平铺，点  $M$ 、 $N$  在其四分之一的矩形的对角线的端点处，根据平面上两点间直线段最短，利用勾股定理，求得结果.

【详解】

根据圆柱的三视图以及其本身的特征，

将圆柱的侧面展开图平铺，

可以确定点  $M$  和点  $N$  分别在以圆柱的高为长方形的宽，圆柱底面圆周长的四分之一为长的长方形的对角线的端点处，

所以所求的最短路径的长度为  $\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，故选 B.

点睛：该题考查的是有关几何体的表面上两点之间的最短距离的求解问题，在解题的过程中，需要明确两个点在几何体上所处的位置，再利用平面上两点间直线段最短，所以处理方法就是将面切开平铺，利用平面图形的相关特征求得结果.

18. 【2018 年新课标 1 卷理科】已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面  $\alpha$  所成的角都相等，则  $\alpha$  截此正方体所得截面面积的最大值为

- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】

首先利用正方体的棱是 3 组每组有互相平行的 4 条棱，所以与 12 条棱所成角相等，只需与

从同一个顶点出发的三条棱所成角相等即可，从而判断出面的位置，截正方体所得的截面为一个正六边形，且边长是面的对角线的一半，应用面积公式求得结果.

【详解】

根据相互平行的直线与平面所成的角是相等的，

所以在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，

平面  $AB_1D_1$  与线  $AA_1, A_1B_1, A_1D_1$  所成的角是相等的，

所以平面  $AB_1D_1$  与正方体的每条棱所在的直线所成角都是相等的，

同理平面  $C_1BD$  也满足与正方体的每条棱所在的直线所成角都是相等，

要求截面面积最大，则截面的位置为夹在两个面  $AB_1D_1$  与  $C_1BD$  中间的，

且过棱的中点的正六边形，且边长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以其面积为  $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，故选 A.

点睛：该题考查的是有关平面被正方体所截得的截面多边形的面积问题，首要任务是需要先确定截面的位置，之后需要从题的条件中找寻相关的字眼，从而得到其为过六条棱的中点的正六边形，利用六边形的面积的求法，应用相关的公式求得结果.

19. 【2018 年新课标 2 卷理科】在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=BC=1$ ， $AA_1=\sqrt{3}$ ，则

异面直线  $AD_1$  与  $DB_1$  所成角的余弦值为

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{6}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【详解】

分析：先建立空间直角坐标系，设立各点坐标，利用向量数量积求向量夹角，再根据向量夹角与线线角相等或互补关系求结果.

详解：以 D 为坐标原点，DA,DC,DD<sub>1</sub> 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则

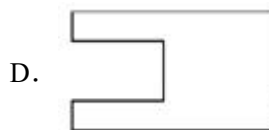
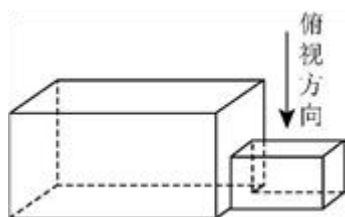
$D(0,0,0), A(1,0,0), B_1(1,1,\sqrt{3}), D_1(0,0,\sqrt{3})$ ，所以  $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3}), \overrightarrow{DB_1}=(1,1,\sqrt{3})$ ，

因为  $\cos \langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AD_1}| |\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{-1+3}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，所以异面直线  $AD_1$  与  $DB_1$  所成角的余弦值为

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，选 C.

点睛：利用法向量求解空间线面角的关键在于“四破”：第一，破“建系关”，构建恰当的空间直角坐标系；第二，破“求坐标关”，准确求解相关点的坐标；第三，破“求法向量关”，求出平面的法向量；第四，破“应用公式关”.

20. 【2018 年新课标 3 卷理科】中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是



【答案】A

【解析】

【详解】

详解：由题意知，题干中所给的是榫头，是凸出的几何体，求得是卯眼的俯视图，卯眼是凹进去的，即俯视图中应有一不可见的长方形，

且俯视图应为对称图形

故俯视图为



故选 A.

点睛：本题主要考查空间几何体的三视图，考查学生的空间想象能力，属于基础题.

21. 【2018 年新课标 3 卷理科】设  $A, B, C, D$  是同一个半径为 4 的球的球面上四点， $\triangle ABC$  为等边三角形且其面积为  $9\sqrt{3}$ ，则三棱锥  $D-ABC$  体积的最大值为

A.  $12\sqrt{3}$

B.  $18\sqrt{3}$

C.  $24\sqrt{3}$

D.  $54\sqrt{3}$

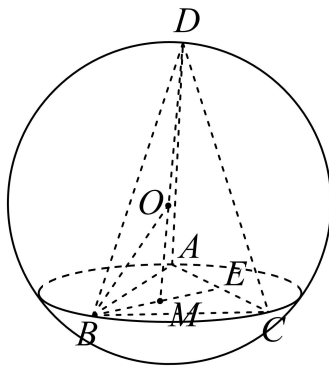
【答案】B

【解析】

【详解】

分析：作图，D 为 MO 与球的交点，点 M 为三角形 ABC 的中心，判断出当  $DM \perp$  平面 ABC 时，三棱锥 D-ABC 体积最大，然后进行计算可得。

详解：如图所示，



点 M 为三角形 ABC 的中心，E 为 AC 中点，

当  $DM \perp$  平面 ABC 时，三棱锥 D-ABC 体积最大

此时， $OD = OB = R = 4$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = 9\sqrt{3}$$

$$\therefore AB = 6,$$

$\because$  点 M 为三角形 ABC 的中心

$$\therefore BM = \frac{2}{3} BE = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle OMB \text{ 中, 有 } OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = 2$$

$$\therefore DM = OD + OM = 4 + 2 = 6$$

$$\therefore (V_{D-ABC})_{\max} = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 6 = 18\sqrt{3}$$

故选 B.

点睛：本题主要考查三棱锥的外接球，考查了勾股定理，三角形的面积公式和三棱锥的体积公式，判断出当  $DM \perp$  平面 ABC 时，三棱锥 D-ABC 体积最大很关键，由 M 为三角形 ABC 的重心，计算得到  $BM = \frac{2}{3} BE = 2\sqrt{3}$ ，再由勾股定理得到 OM，进而得到结果，属于较难题

型.

22. 【2022 年新高考 1 卷】已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ , 则 ( )

- A. 直线  $BC_1$  与  $DA_1$  所成的角为  $90^\circ$       B. 直线  $BC_1$  与  $CA_1$  所成的角为  $90^\circ$   
C. 直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角为  $45^\circ$       D. 直线  $BC_1$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$

【答案】ABD

【解析】

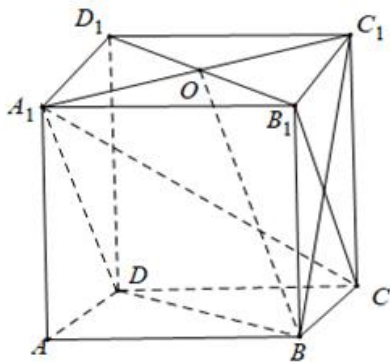
【分析】

数形结合, 依次对所给选项进行判断即可.

【详解】

如图, 连接  $B_1C$ 、 $BC_1$ , 因为  $DA_1 // B_1C$ , 所以直线  $BC_1$  与  $B_1C$  所成的角即为直线  $BC_1$  与  $DA_1$  所成的角,

因为四边形  $BB_1C_1C$  为正方形, 则  $B_1C \perp BC_1$ , 故直线  $BC_1$  与  $DA_1$  所成的角为  $90^\circ$ , A 正确;



连接  $A_1C$ , 因为  $A_1B_1 \perp$  平面  $BB_1C_1C$ ,  $BC_1 \subset$  平面  $BB_1C_1C$ , 则  $A_1B_1 \perp BC_1$ ,

因为  $B_1C \perp BC_1$ ,  $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$ , 所以  $BC_1 \perp$  平面  $A_1B_1C$ ,

又  $A_1C \subset$  平面  $A_1B_1C$ , 所以  $BC_1 \perp CA_1$ , 故 B 正确;

连接  $A_1C_1$ , 设  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ , 连接  $BO$ ,

因为  $BB_1 \perp$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $C_1O \subset$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ , 则  $C_1O \perp B_1B$ ,

因为  $C_1O \perp B_1D_1$ ,  $B_1D_1 \cap B_1B = B_1$ , 所以  $C_1O \perp$  平面  $BB_1D_1D$ ,

所以  $\angle C_1BO$  为直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角,

设正方体棱长为 1, 则  $C_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $BC_1 = \sqrt{2}$ ,  $\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$ ,

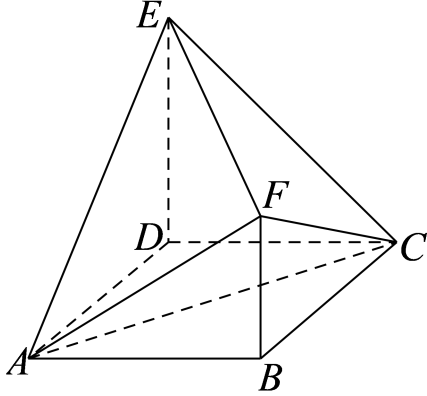
所以, 直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角为  $30^\circ$ , 故 C 错误;

因为  $C_1C \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $\angle C_1BC$  为直线  $BC_1$  与平面  $ABCD$  所成的角, 易得  $\angle C_1BC = 45^\circ$ , 故

D 正确.

故选：ABD

23.【2022年新高考2卷】如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $FB \parallel ED$ ， $AB = ED = 2FB$ ，记三棱锥 $E-ACD$ ， $F-ABC$ ， $F-ACE$ 的体积分别为 $V_1, V_2, V_3$ ，则（ ）



A.  $V_3 = 2V_2$

B.  $V_3 = V_1$

C.  $V_3 = V_1 + V_2$

D.  $2V_3 = 3V_1$

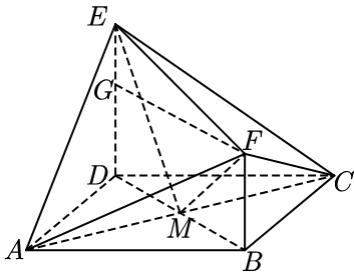
【答案】CD

【解析】

【分析】

直接由体积公式计算 $V_1, V_2$ ，连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $M$ ，连接 $EM, FM$ ，由 $V_3 = V_{A-EFM} + V_{C-EFM}$ 计算出 $V_3$ ，依次判断选项即可.

【详解】



设 $AB = ED = 2FB = 2a$ ，因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $FB \parallel ED$ ，则 $V_1 = \frac{1}{3} \cdot ED \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot$

$$(2a)^2 = \frac{4}{3}a^3,$$

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot FB \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot (2a)^2 = \frac{2}{3}a^3$ ，连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $M$ ，连接 $EM, FM$ ，易得 $BD \perp AC$ ，

又 $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，则 $ED \perp AC$ ，又 $ED \cap BD = D$ ， $ED, BD \subset$ 平面 $BDEF$ ，则 $AC \perp$ 平面 $BDEF$ ，

又  $BM = DM = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}a$ , 过  $F$  作  $FG \perp DE$  于  $G$ , 易得四边形  $BDGF$  为矩形, 则  $FG = BD = 2\sqrt{2}a, EG = a$ ,

则  $EM = \sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{6}a, FM = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3}a, EF = \sqrt{a^2 + (2\sqrt{2}a)^2} = 3a$ ,

$EM^2 + FM^2 = EF^2$ , 则  $EM \perp FM$ ,  $S_{\triangle EFM} = \frac{1}{2}EM \cdot FM = \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2$ ,  $AC = 2\sqrt{2}a$ ,

则  $V_3 = V_{A-EFM} + V_{C-EFM} = \frac{1}{3}AC \cdot S_{\triangle EFM} = 2a^3$ , 则  $2V_3 = 3V_1, V_3 = 3V_2, V_3 = V_1 + V_2$ ,

故 A、B 错误; C、D 正确.

故选: CD.

24. 【2021 年新高考 1 卷】在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB = AA_1 = 1$ , 点  $P$  满足

$\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$ , 其中  $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$ , 则 ( )

A. 当  $\lambda = 1$  时,  $\triangle AB_1P$  的周长为定值

B. 当  $\mu = 1$  时, 三棱锥  $P-A_1BC$  的体积为定值

C. 当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时, 有且仅有一个点  $P$ , 使得  $A_1P \perp BP$

D. 当  $\mu = \frac{1}{2}$  时, 有且仅有一个点  $P$ , 使得  $A_1B \perp$  平面  $AB_1P$

【答案】BD

【解析】

【分析】

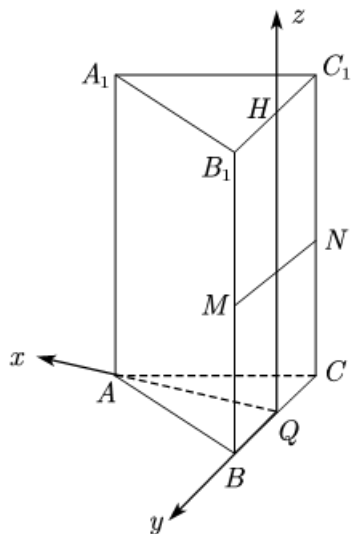
对于 A, 由于等价向量关系, 联系到一个三角形内, 进而确定点的坐标;

对于 B, 将  $P$  点的运动轨迹考虑到一个三角形内, 确定路线, 进而考虑体积是否为定值;

对于 C, 考虑借助向量的平移将  $P$  点轨迹确定, 进而考虑建立合适的直角坐标系来求解  $P$  点的个数;

对于 D, 考虑借助向量的平移将  $P$  点轨迹确定, 进而考虑建立合适的直角坐标系来求解  $P$  点的个数.

【详解】



易知，点  $P$  在矩形  $BCC_1B_1$  内部（含边界）。

对于 A，当  $\lambda=1$  时， $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{CC_1}$ ，即此时  $P \in$  线段  $CC_1$ ， $\triangle AB_1P$  周长不是定值，故 A 错误；

对于 B，当  $\mu=1$  时， $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \lambda\overrightarrow{B_1C_1}$ ，故此时  $P$  点轨迹为线段  $B_1C_1$ ，而  $B_1C_1 \parallel BC$ ， $B_1C_1 \parallel$  平面  $A_1BC$ ，则有  $P$  到平面  $A_1BC$  的距离为定值，所以其体积为定值，故 B 正确。

对于 C，当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时， $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$ ，取  $BC$ ， $B_1C_1$  中点分别为  $Q$ ， $H$ ，则  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ} + \mu\overrightarrow{QH}$ ，

所以  $P$  点轨迹为线段  $QH$ ，不妨建系解决，建立空间直角坐标系如图， $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1\right)$ ， $P(0, 0, \mu)$ ，

$B\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ ，则  $\overrightarrow{A_1P} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \mu-1\right)$ ， $\overrightarrow{BP} = \left(0, -\frac{1}{2}, \mu\right)$ ， $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{BP} = \mu(\mu-1) = 0$ ，所以  $\mu=0$

或  $\mu=1$ 。故  $H, Q$  均满足，故 C 错误；

对于 D，当  $\mu = \frac{1}{2}$  时， $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$ ，取  $BB_1$ ， $CC_1$  中点为  $M, N$ 。  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BM} + \lambda\overrightarrow{MN}$ ，所

以  $P$  点轨迹为线段  $MN$ 。设  $P\left(0, y_0, \frac{1}{2}\right)$ ，因为  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$ ，所以  $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, y_0, \frac{1}{2}\right)$ ，

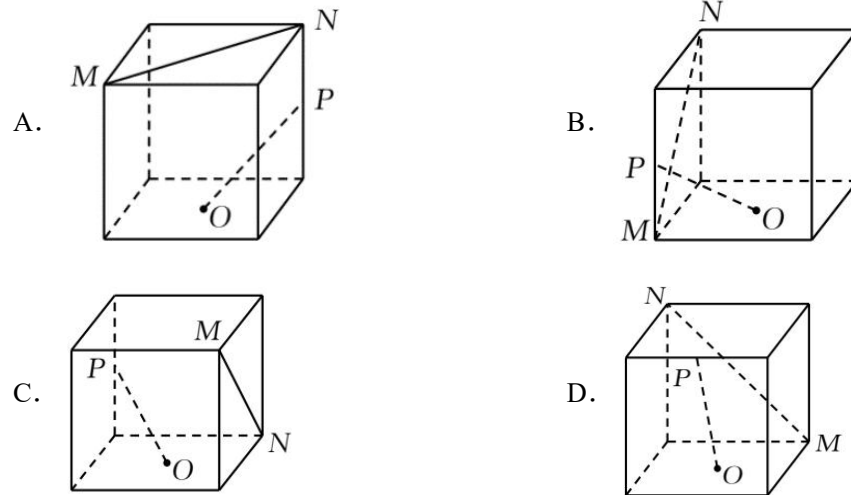
$\overrightarrow{A_1B} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ ，所以  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$ ，此时  $P$  与  $N$  重合，故 D 正确。

故选：BD。

【点睛】

本题主要考查向量的等价替换，关键之处在于所求点的坐标放在三角形内。

25. 【2021 年新高考 2 卷】如图，在正方体中， $O$  为底面的中心， $P$  为所在棱的中点， $M$ ， $N$  为正方体的顶点，则满足  $MN \perp OP$  的是（ ）



【答案】BC

【解析】

【分析】

根据线面垂直的判定定理可得 BC 的正误，平移直线  $MN$  构造所考虑的线线角后可判断 AD 的正误。

【详解】

设正方体的棱长为 2，

对于 A，如图（1）所示，连接  $AC$ ，则  $MN \parallel AC$ ，

故  $\angle POC$ （或其补角）为异面直线  $OP, MN$  所成的角，

在直角三角形  $OPC$ ， $OC = \sqrt{2}$ ， $CP = 1$ ，故  $\tan \angle POC = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故  $MN \perp OP$  不成立，故 A 错误。

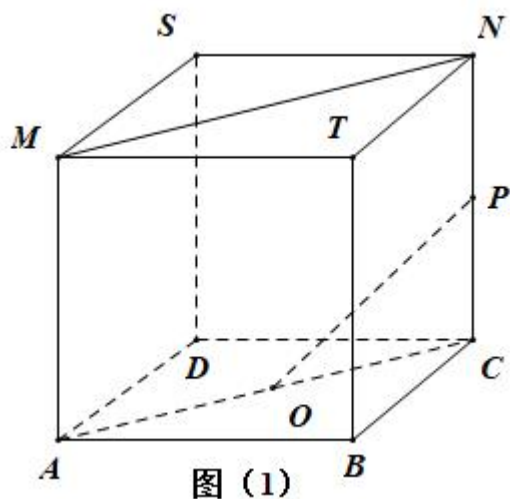


图 (1)

对于 B，如图 (2) 所示，取  $NT$  的中点为  $Q$ ，连接  $PQ$ ， $OQ$ ，则  $OQ \perp NT$ ， $PQ \perp MN$ ，  
由正方体  $SBCM - NADT$  可得  $SN \perp$  平面  $ANDT$ ，而  $OQ \subset$  平面  $ANDT$ ，  
故  $SN \perp OQ$ ，而  $SN \cap MN = N$ ，故  $OQ \perp$  平面  $SNTM$ ，  
又  $MN \subset$  平面  $SNTM$ ， $OQ \perp MN$ ，而  $OQ \cap PQ = Q$ ，  
所以  $MN \perp$  平面  $OPQ$ ，而  $PO \subset$  平面  $OPQ$ ，故  $MN \perp OP$ ，故 B 正确.

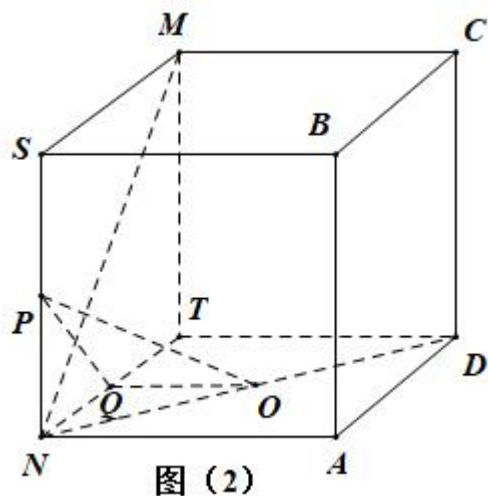


图 (2)

对于 C，如图 (3)，连接  $BD$ ，则  $BD \parallel MN$ ，由 B 的判断可得  $OP \perp BD$ ，  
故  $OP \perp MN$ ，故 C 正确.

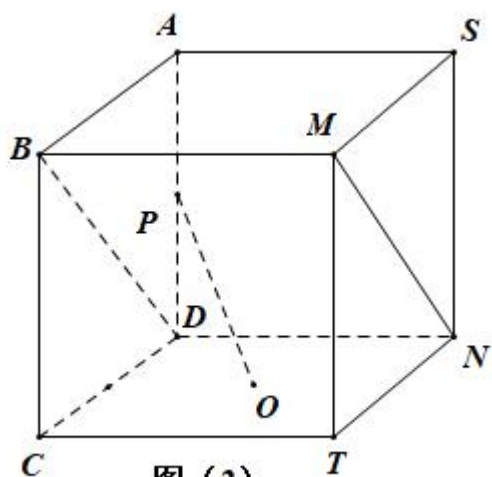


图 (3)

对于 D，如图 (4)，取  $AD$  的中点  $Q$ ， $AB$  的中点  $K$ ，连接  $AC, PQ, OQ, PK, OK$ ，

则  $AC \parallel MN$ ，

因为  $DP = PC$ ，故  $PQ \parallel AC$ ，故  $PQ \parallel MN$ ，

所以  $\angle QPO$  或其补角为异面直线  $PO, MN$  所成的角，

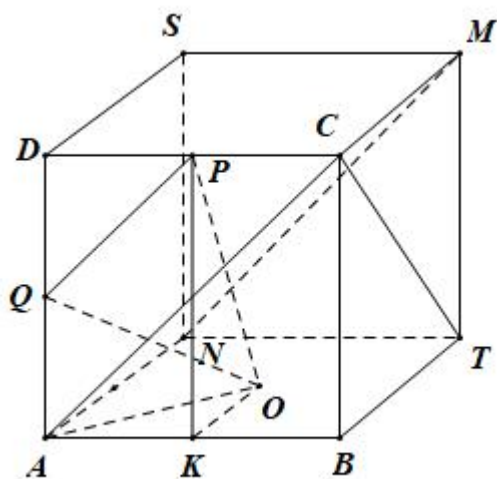


图 (4)

因为正方体的棱长为 2，故  $PQ = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ ， $OQ = \sqrt{AO^2 + AQ^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ ，

$PO = \sqrt{PK^2 + OK^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ ， $QO^2 < PQ^2 + OP^2$ ，故  $\angle QPO$  不是直角，

故  $PO, MN$  不垂直，故 D 错误。

故选：BC。

26. 【2020 年新课标 3 卷理科】已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为\_\_\_\_\_。

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】

【分析】

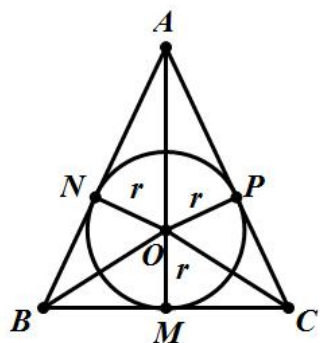
将原问题转化为求解圆锥内切球的问题，然后结合截面确定其半径即可确定体积的值.

【详解】

易知半径最大球为圆锥的内切球，球与圆锥内切时的轴截面如图所示，

其中  $BC=2, AB=AC=3$ ，且点  $M$  为  $BC$  边上的中点，

设内切圆的圆心为  $O$ ，



由于  $AM = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

设内切圆半径为  $r$ ，则：

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times AB \times r + \frac{1}{2} \times BC \times r + \frac{1}{2} \times AC \times r \\ &= \frac{1}{2} \times (3+3+2) \times r = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

解得：  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，其体积：  $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi$ 。

故答案为：  $\frac{\sqrt{2}}{3} \pi$ 。

【点睛】

与球有关的组合体问题，一种是内切，一种是外接。解题时要认真分析图形，明确切点和接点的位置，确定有关元素间的数量关系，并作出合适的截面图，如球内切于正方体，切点为正方体各个面的中心，正方体的棱长等于球的直径；球外接于正方体，正方体的顶点均在球面上，正方体的体对角线长等于球的直径。

27. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】已知直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长均为 2， $\angle BAD=60^\circ$ 。以  $D_1$  为球心， $\sqrt{5}$  为半径的球面与侧面  $BCC_1B_1$  的交线长为\_\_\_\_\_。

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ .

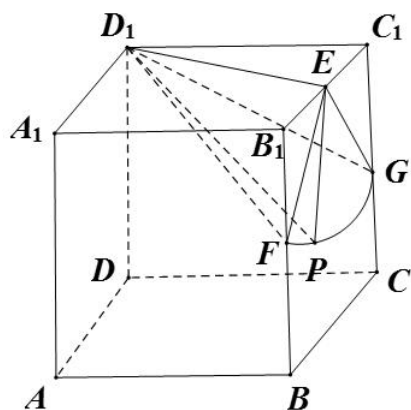
【解析】

【分析】

根据已知条件易得  $D_1E = \sqrt{3}$ ， $D_1E \perp$  侧面  $B_1C_1CB$ ，可得侧面  $B_1C_1CB$  与球面的交线上的点到  $E$  的距离为  $\sqrt{2}$ ，可得侧面  $B_1C_1CB$  与球面的交线是扇形  $EFG$  的弧  $\widehat{FG}$ ，再根据弧长公式可求得结果.

【详解】

如图：



取  $B_1C_1$  的中点为  $E$ ， $BB_1$  的中点为  $F$ ， $CC_1$  的中点为  $G$ ，

因为  $\angle BAD = 60^\circ$ ，直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长均为 2，所以  $\triangle D_1B_1C_1$  为等边三角形，

所以  $D_1E = \sqrt{3}$ ， $D_1E \perp B_1C_1$ ，

又四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  为直四棱柱，所以  $BB_1 \perp$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ ，所以  $BB_1 \perp B_1C_1$ ，

因为  $BB_1 \cap B_1C_1 = B_1$ ，所以  $D_1E \perp$  侧面  $B_1C_1CB$ ，

设  $P$  为侧面  $B_1C_1CB$  与球面的交线上的点，则  $D_1E \perp EP$ ，

因为球的半径为  $\sqrt{5}$ ， $D_1E = \sqrt{3}$ ，所以  $|EP| = \sqrt{|D_1P|^2 - |D_1E|^2} = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}$ ，

所以侧面  $B_1C_1CB$  与球面的交线上的点到  $E$  的距离为  $\sqrt{2}$ ，

因为  $|EF| = |EG| = \sqrt{2}$ ，所以侧面  $B_1C_1CB$  与球面的交线是扇形  $EFG$  的弧  $\widehat{FG}$ ，

因为  $\angle B_1EF = \angle C_1EG = \frac{\pi}{4}$ ，所以  $\angle FEG = \frac{\pi}{2}$ ，

所以根据弧长公式可得  $\widehat{FG} = \frac{\pi}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ .

故答案为:  $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ .

【点睛】

本题考查了直棱柱的结构特征,考查了直线与平面垂直的判定,考查了立体几何中的轨迹问题,考查了扇形中的弧长公式,属于中档题.

28. 【2020 年新高考 2 卷(海南卷)】已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $M$ 、 $N$  分别为  $BB_1$ 、 $AB$  的中点, 则三棱锥  $A-NMD_1$  的体积为\_\_\_\_\_

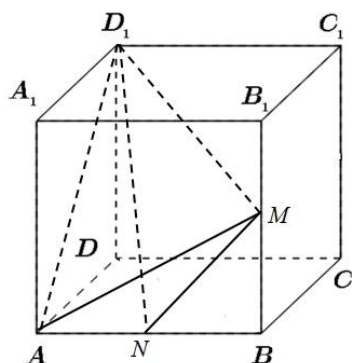
【答案】  $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】

利用  $V_{A-NMD_1} = V_{D_1-AMN}$  计算即可.

【详解】



因为正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $M$ 、 $N$  分别为  $BB_1$ 、 $AB$  的中点

所以  $V_{A-NMD_1} = V_{D_1-AMN} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$

故答案为:  $\frac{1}{3}$

【点睛】

在求解三棱锥的体积时, 要注意观察图形的特点, 看把哪个当成顶点好计算一些.

29. 【2019 年新课标 2 卷理科】中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有\_\_\_\_\_个面, 其棱长为\_\_\_\_\_.



图 1

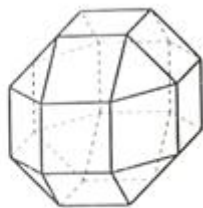


图 2

【答案】 共 26 个面. 棱长为  $\sqrt{2}-1$ .

【解析】

【分析】

第一问可按题目数出来，第二问需在正方体中简单还原出物体位置，利用对称性，平面几何解决.

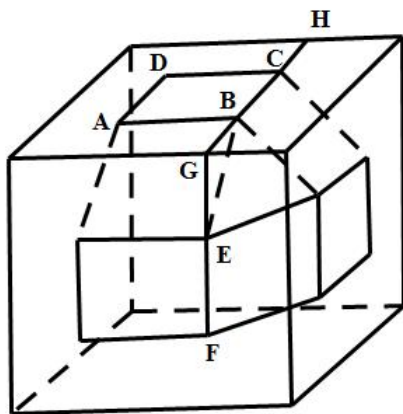
【详解】

由图可知第一层与第三层各有 9 个面，计 18 个面，第二层共有 8 个面，所以该半正多面体共有  $18+8=26$  个面.

如图，设该半正多面体的棱长为  $x$ ，则  $AB=BE=x$ ，延长  $BC$  与  $FE$  交于点  $G$ ，延长  $BC$  交正方体棱于  $H$ ，由半正多面体对称性可知， $\triangle BGE$  为等腰直角三角形，

$$\therefore BG=GE=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad \therefore GH=2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}x+x=(\sqrt{2}+1)x=1,$$

$$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1, \quad \text{即该半正多面体棱长为 } \sqrt{2}-1.$$

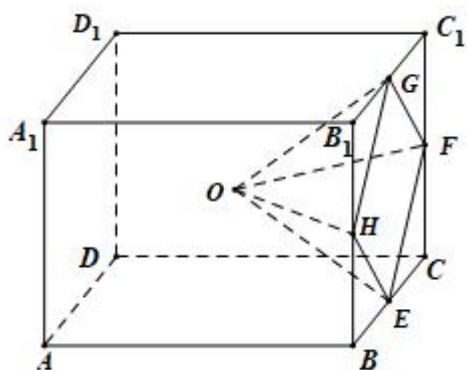


【点睛】

本题立意新颖，空间想象能力要求高，物体位置还原是关键，遇到新题别慌乱，题目其实很简单，稳中求胜是关键. 立体几何平面化，无论多难都不怕，强大空间想象能力，快速还原图形.

30. 【2019 年新课标 3 卷理科】学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型.如图，

该模型为长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  挖去四棱锥  $O-EFGH$  后所得的几何体，其中  $O$  为长方体的中心， $E, F, G, H$  分别为所在棱的中点， $AB=BC=6\text{cm}$ ,  $AA_1=4\text{cm}$ ，3D 打印所用原料密度为  $0.9\text{g}/\text{cm}^3$ ，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为\_\_\_\_\_g.



【答案】118.8

【解析】

【分析】

根据题意可知模型的体积为长方体体积与四棱锥体积之差进而求得模型的体积，再求出模型的质量.

【详解】

由题意得， $S_{EFGH} = 4 \times 6 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 12\text{cm}^2$ ，

四棱锥  $O-EFGH$  的高  $3\text{cm}$ ， $\therefore V_{O-EFGH} = \frac{1}{3} \times 12 \times 3 = 12\text{cm}^3$ .

又长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积为  $V_2 = 4 \times 6 \times 6 = 144\text{cm}^3$ ，

所以该模型体积为  $V = V_2 - V_1 = 144 - 12 = 132\text{cm}^3$ ，

其质量为  $0.9 \times 132 = 118.8\text{g}$ .

【点睛】

本题考查几何体的体积问题，理解题中信息联系几何体的体积和质量关系，从而利用公式求解.

31. 【2018 年新课标 2 卷理科】已知圆锥的顶点为  $S$ ，母线  $SA$ ， $SB$  所成角的余弦值为  $\frac{7}{8}$ ， $SA$  与圆锥底面所成角为  $45^\circ$ ，若  $\triangle SAB$  的面积为  $5\sqrt{15}$ ，则该圆锥的侧面积为\_\_\_\_\_.

【答案】 $40\sqrt{2}\pi$

---

【解析】

【详解】

分析：先根据三角形面积公式求出母线长,再根据母线与底面所成角得底面半径，最后根据圆锥侧面积公式求结果.

详解：因为母线  $SA$ ， $SB$  所成角的余弦值为  $\frac{7}{8}$ ，所以母线  $SA$ ， $SB$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ ，

因为  $\triangle SAB$  的面积为  $5\sqrt{15}$ ，设母线长为  $l$ ，所以  $\frac{1}{2} \times l^2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 5\sqrt{15} \therefore l^2 = 80$ ，

因为  $SA$  与圆锥底面所成角为  $45^\circ$ ，所以底面半径为  $l \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ ，

因此圆锥的侧面积为  $\pi r l = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi l^2 = 40\sqrt{2}\pi$ .

