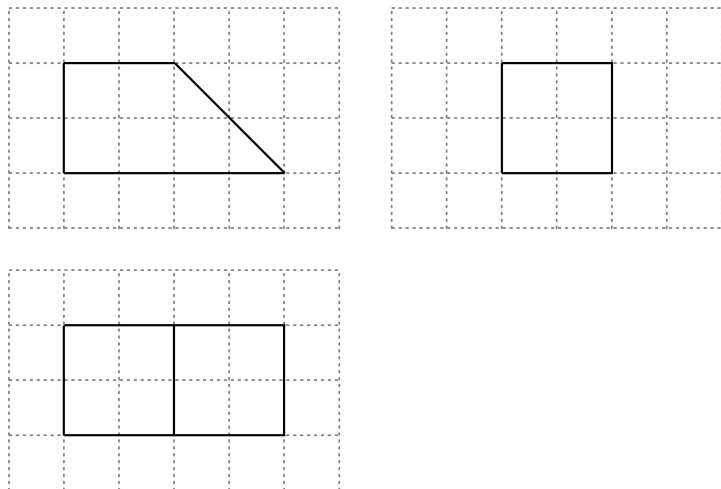


专题 05 立体几何（选填题）（文科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为（ ）



- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

【答案】B

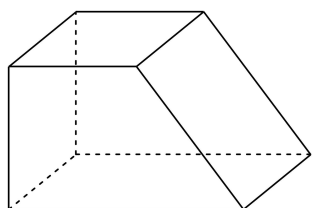
【解析】

【分析】

由三视图还原几何体，再由棱柱的体积公式即可得解.

【详解】

由三视图还原几何体，如图，



则该直四棱柱的体积 $V = \frac{2+4}{2} \times 2 \times 2 = 12$.

故选：B.

2. 【2022 年全国甲卷】在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° ，则（ ）

- A. $AB = 2AD$ B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°
C. $AC = CB_1$ D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

【答案】D

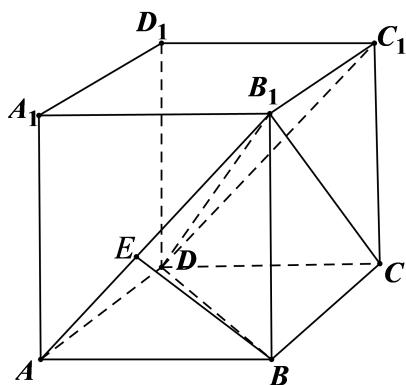
【解析】

【分析】

根据线面角的定义以及长方体的结构特征即可求出.

【详解】

如图所示:



不妨设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$, 依题以及长方体的结构特征可知, B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle B_1DB$, B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle DB_1A$, 所以 $\sin 30^\circ = \frac{c}{B_1D} = \frac{b}{B_1D}$, 即 $b = c$, $B_1D = 2c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 解得 $a = \sqrt{2}c$.

对于 A, $AB = a, AD = b, AB = \sqrt{2}AD$, A 错误;

对于 B, 过 B 作 $BE \perp AB_1$ 于 E, 易知 $BE \perp$ 平面 AB_1C_1D , 所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成角为 $\angle BAE$,

因为 $\tan \angle BAE = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\angle BAE \neq 30^\circ$, B 错误;

对于 C, $AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c$, $CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}c$, $AC \neq CB_1$, C 错误;

对于 D, B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成角为 $\angle DB_1C$, $\sin \angle DB_1C = \frac{CD}{B_1D} = \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 而 $0 < \angle DB_1C < 90^\circ$, 所以 $\angle DB_1C = 45^\circ$. D 正确.

故选: D.

3. 【2022 年全国甲卷】甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π , 侧

面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$, 体积分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$. 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$, 则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = (\quad)$

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】

设母线长为 l ，甲圆锥底面半径为 r_1 ，乙圆锥底面圆半径为 r_2 ，根据圆锥的侧面积公式可得 $r_1 = 2r_2$ ，再结合圆心角之和可将 r_1, r_2 分别用 l 表示，再利用勾股定理分别求出两圆锥的高，再根据圆锥的体积公式即可得解.

【详解】

解：设母线长为 l ，甲圆锥底面半径为 r_1 ，乙圆锥底面圆半径为 r_2 ，

$$\text{则} \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l} = \frac{r_1}{r_2} = 2,$$

$$\text{所以} r_1 = 2r_2,$$

$$\text{又} \frac{2\pi r_1}{l} + \frac{2\pi r_2}{l} = 2\pi,$$

$$\text{则} \frac{r_1 + r_2}{l} = 1,$$

$$\text{所以} r_1 = \frac{2}{3}l, r_2 = \frac{1}{3}l,$$

$$\text{所以甲圆锥的高} h_1 = \sqrt{l^2 - \frac{4}{9}l^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}l,$$

$$\text{乙圆锥的高} h_2 = \sqrt{l^2 - \frac{1}{9}l^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}l,$$

$$\text{所以} \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{\frac{4}{9}l^2 \times \frac{\sqrt{5}}{3}l}{\frac{1}{9}l^2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}l} = \sqrt{10}.$$

故选：C.

4. 【2022 年全国乙卷】在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AB, BC 的中点，则（ ）

A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1

B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF //$ 平面 A_1AC

D. 平面 $B_1EF //$ 平面 A_1C_1D

【答案】A

【解析】

【分析】

证明 $EF \perp$ 平面 BDD_1 ，即可判断 A；如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB = 2$ ，分别求出平面 B_1EF, A_1BD, A_1C_1D 的法向量，根据法向量的位置关系，即可判断 BCD.

【详解】

解：在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AC \perp BD$ 且 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，

又 $EF \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $EF \perp DD_1$ ，

因为 E, F 分别为 AB, BC 的中点，

所以 $EF \parallel AC$ ，所以 $EF \perp BD$ ，

又 $BD \cap DD_1 = D$ ，

所以 $EF \perp$ 平面 BDD_1 ，

又 $EF \subset$ 平面 B_1EF ，

所以平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 ，故 A 正确；

如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB = 2$ ，

则 $B_1(2,2,2), E(2,1,0), F(1,2,0), B(2,2,0), A_1(2,0,2), A(2,0,0), C(0,2,0)$ ，

$C_1(0,2,2)$ ，

则 $\overrightarrow{EF} = (-1,1,0), \overrightarrow{EB_1} = (0,1,2), \overrightarrow{DB} = (2,2,0), \overrightarrow{DA_1} = (2,0,2)$ ，

$\overrightarrow{AA_1} = (0,0,2), \overrightarrow{AC} = (-2,2,0), \overrightarrow{A_1C_1} = (-2,2,0)$ ，

设平面 B_1EF 的法向量为 $\overrightarrow{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

则有 $\begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{EF} = -x_1 + y_1 = 0 \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{EB_1} = y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$ ，可取 $\overrightarrow{m} = (2, 2, -1)$ ，

同理可得平面 A_1BD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, -1)$ ，

平面 A_1AC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (1, 1, 0)$ ，

平面 A_1C_1D 的法向量为 $\overrightarrow{n_3} = (1, 1, -1)$ ，

则 $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n_1} = 2 - 2 + 1 = 1 \neq 0$ ，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1BD 不垂直，故 B 错误；

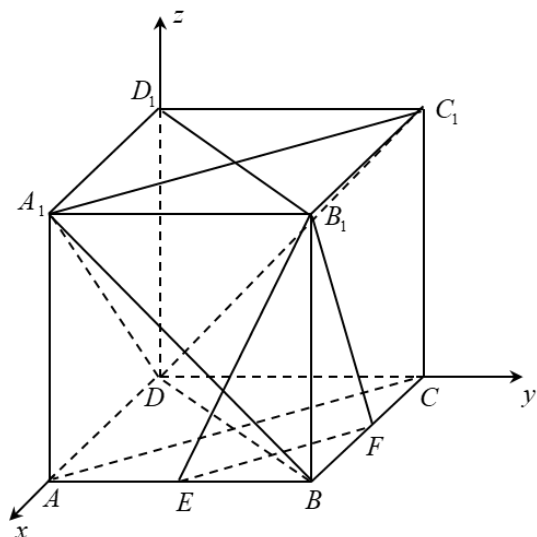
因为 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n_2}$ 不平行，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1AC 不平行，故 C 错误；

因为 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n_3}$ 不平行，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1C_1D 不平行，故 D 错误，

故选：A.



5. 【2022 年全国乙卷】已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O ，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

先证明当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$ ，进而得到四棱锥体积表达式，再利用均值定理去求四棱锥体积的最大值，从而得到当该四棱锥的体积最大时其高的值.

【详解】

设该四棱锥底面为四边形 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r ，

设四边形 $ABCD$ 对角线夹角为 α ，

$$\text{则 } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$$

（当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立）

即当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$

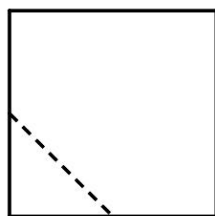
$$\text{又 } r^2 + h^2 = 1$$

$$\text{则 } V_{O-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r^2 \cdot r^2 \cdot 2h^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{r^2 + r^2 + 2h^2}{3}\right)^3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$$

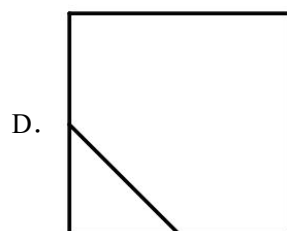
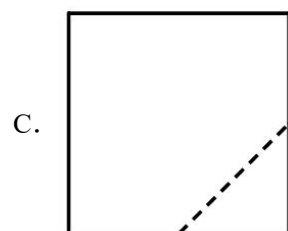
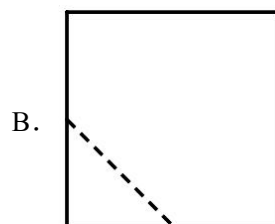
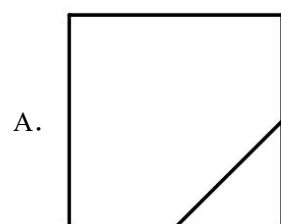
当且仅当 $r^2 = 2h^2$ 即 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，

故选：C

6. 【2021 年甲卷文科】在一个正方体中，过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是 ()



正视图



【答案】D

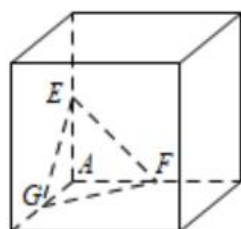
【解析】

【分析】

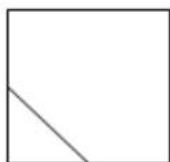
根据题意及题目所给的正视图还原出几何体的直观图，结合直观图进行判断.

【详解】

由题意及正视图可得几何体的直观图，如图所示，



所以其侧视图为



故选：D

7. 【2021 年乙卷文科】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（ ）

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

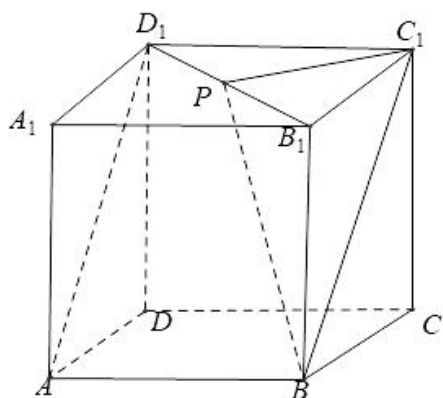
【答案】D

【解析】

【分析】

平移直线 AD_1 至 BC_1 ，将直线 PB 与 AD_1 所成的角转化为 PB 与 BC_1 所成的角，解三角形即可.

【详解】



如图，连接 BC_1, PC_1, PB ，因为 $AD_1 \parallel BC_1$ ，

所以 $\angle PBC_1$ 或其补角为直线 PB 与 AD_1 所成的角，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以 $BB_1 \perp PC_1$ ，又 $PC_1 \perp B_1D_1$ ， $BB_1 \cap B_1D_1 = B_1$ ，

所以 $PC_1 \perp$ 平面 PBB_1 ，所以 $PC_1 \perp PB$ ，

设正方体棱长为 2，则 $BC_1 = 2\sqrt{2}$ ， $PC_1 = \frac{1}{2}D_1B_1 = \sqrt{2}$ ，

$\sin \angle PBC_1 = \frac{PC_1}{BC_1} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}$ 。

故选：D

8.【2018 年新课标 1 卷文科】已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1 , O_2 , 过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形, 则该圆柱的表面积为

- A. $12\sqrt{2}\pi$ B. 12π C. $8\sqrt{2}\pi$ D. 10π

【答案】B

【解析】

【详解】

分析: 首先根据正方形的面积求得正方形的边长, 从而进一步确定圆柱的底面圆半径与圆柱的高, 从而利用相关公式求得圆柱的表面积.

详解: 根据题意, 可得截面是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形,

结合圆柱的特征, 可知该圆柱的底面为半径是 $\sqrt{2}$ 的圆, 且高为 $2\sqrt{2}$,

所以其表面积为 $S = 2\pi(\sqrt{2})^2 + 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12\pi$, 故选 B.

点睛: 该题考查的是有关圆柱的表面积的求解问题, 在解题的过程中, 需要利用题的条件确定圆柱的相关量, 即圆柱的底面圆的半径以及圆柱的高, 在求圆柱的表面积的时候, 一定要注意是两个底面圆与侧面积的和.

9.【2018 年新课标 1 卷文科】在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° , 则该长方体的体积为

- A. 8 B. $6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

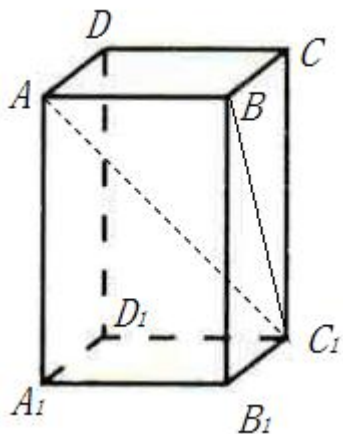
【分析】

首先画出长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 利用题中条件, 得到 $\angle AC_1B = 30^\circ$, 根据 $AB = 2$, 求得

$BC_1 = 2\sqrt{3}$, 可以确定 $CC_1 = 2\sqrt{2}$, 之后利用长方体的体积公式求出长方体的体积.

【详解】

在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 BC_1 ,



根据线面角的定义可知 $\angle AC_1B = 30^\circ$,

因为 $AB = 2$, 所以 $BC_1 = 2\sqrt{3}$, 从而求得 $CC_1 = 2\sqrt{2}$,

所以该长方体的体积为 $V = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, 故选 C.

【点睛】

该题考查的是长方体的体积的求解问题, 在解题的过程中, 需要明确长方体的体积公式为长宽高的乘积, 而题中的条件只有两个值, 所以利用题中的条件求解另一条边的长就显得尤为重要, 此时就需要明确线面角的定义, 从而得到量之间的关系, 从而求得结果.

10. 【2018 年新课标 2 卷文科】在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

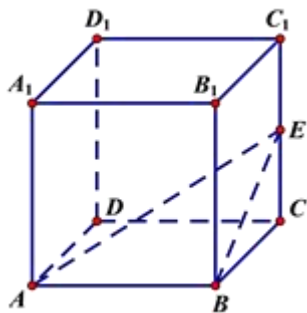
利用正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $CD \parallel AB$, 将问题转化为求共面直线 AB 与 AE 所成角的正切值, 在 $\triangle ABE$ 中进行计算即可.

【详解】

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $CD \parallel AB$, 所以异面直线 AE 与 CD 所成角为 $\angle EAB$,

设正方体边长为 $2a$, 则由 E 为棱 CC_1 的中点, 可得 $CE = a$, 所以 $BE = \sqrt{5}a$,

则 $\tan \angle EAB = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{5}a}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.



【点睛】

求异面直线所成角主要有以下两种方法：

(1) 几何法：①平移两直线中的一条或两条，到一个平面中；②利用边角关系，找到（或构造）所求角所在的三角形；③求出三边或三边比例关系，用余弦定理求角；

(2) 向量法：①求两直线的方向向量；②求两向量夹角的余弦；③因为直线夹角为锐角，所以②对应的余弦取绝对值即为直线所成角的余弦值.

11. 【2021 年甲卷文科】已知一个圆锥的底面半径为 6，其体积为 30π 则该圆锥的侧面积为_____.

【答案】 39π

【解析】

【分析】

利用体积公式求出圆锥的高，进一步求出母线长，最终利用侧面积公式求出答案.

【详解】

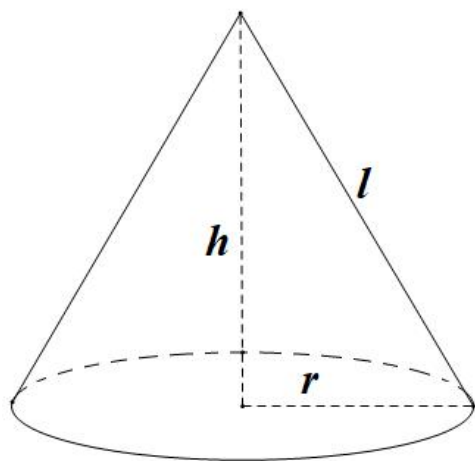
$$\because V = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot h = 30\pi$$

$$\therefore h = \frac{5}{2}$$

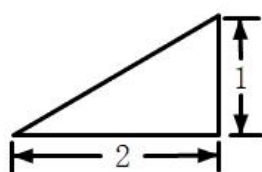
$$\therefore l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2}$$

$$\therefore S_{\text{侧}} = \pi r l = \pi \times 6 \times \frac{13}{2} = 39\pi .$$

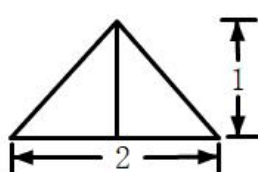
故答案为： 39π .



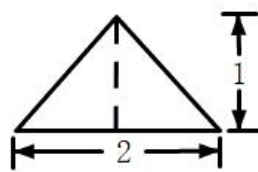
12. 【2021 年乙卷文科】以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____（写出符合要求的一组答案即可）.



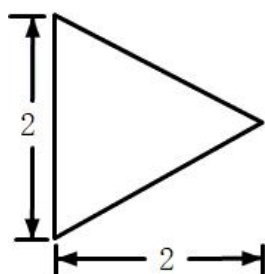
图①



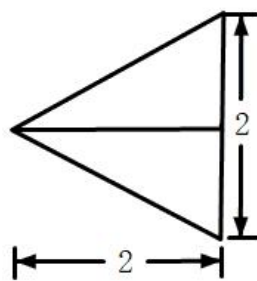
图②



图③



图④



图⑤

【答案】③④（答案不唯一）

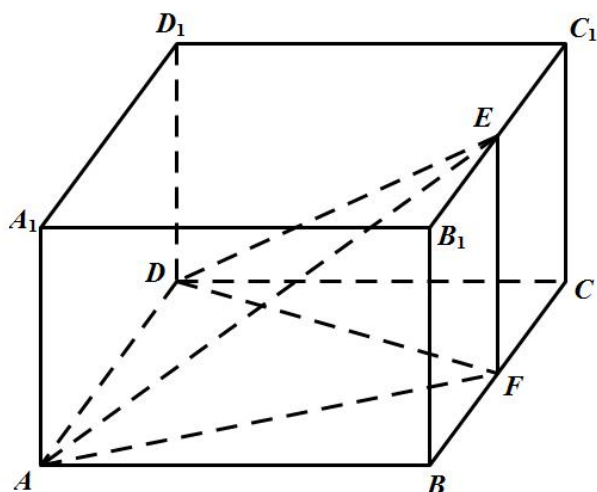
【解析】

【分析】

由题意结合所给的图形确定一组三视图的组合即可.

【详解】

选择侧视图为③，俯视图为④，



如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2, BB_1=1$ ，

E, F 分别为棱 B_1C_1, BC 的中点，

则正视图①，侧视图③，俯视图④对应的几何体为三棱锥 $E-ADF$ 。

故答案为：③④。

【点睛】

三视图问题解决的关键之处是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系。

13. 【2019 年新课标 1 卷文科】已知 $\angle ACB=90^\circ$ ， P 为平面 ABC 外一点， $PC=2$ ，点 P 到 $\angle A$ CB 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$ ，那么 P 到平面 ABC 的距离为_____。

【答案】 $\sqrt{2}$ 。

【解析】

【分析】

本题考查学生空间想象能力，合理画图成为关键，准确找到 P 在底面上的射影，使用线面垂直定理，得到垂直关系，勾股定理解决。

【详解】

作 PD, PE 分别垂直于 AC, BC ， $PO \perp$ 平面 ABC ，连 CO ，

知 $CD \perp PD, CD \perp PO$ ， $PD \cap OD=P$ ，

$\therefore CD \perp$ 平面 PDO ， $OD \subset$ 平面 PDO ，

$\therefore CD \perp OD$

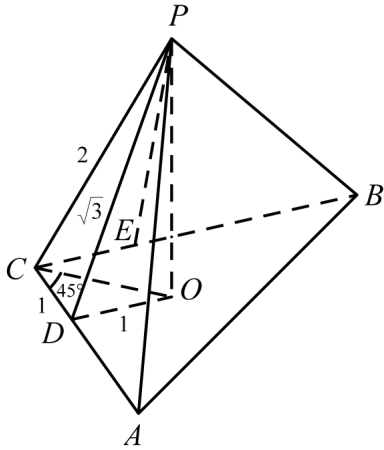
$\because PD=PE=\sqrt{3}$ ， $PC=2$ 。 $\therefore \sin \angle PCE = \sin \angle PCD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\therefore \angle PCB = \angle PCA = 60^\circ,$$

$$\therefore PO \perp CO, \text{ CO 为 } \angle ACB \text{ 平分线},$$

$$\therefore \angle OCD = 45^\circ \therefore OD = CD = 1, \quad OC = \sqrt{2}, \quad \text{又 } PC = 2,$$

$$\therefore PO = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}.$$



【点睛】

画图视角选择不当，线面垂直定理使用不够灵活，难以发现垂直关系，问题即很难解决，将几何体摆放成正常视角，是立体几何问题解决的有效手段，几何关系利于观察，解题事半功倍。

14. 【2018 年新课标 2 卷文科】已知圆锥的顶点为 S ，母线 SA ， SB 互相垂直， SA 与圆锥底面所成角为 30° ，若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为_____。

【答案】 8π

【解析】

【详解】

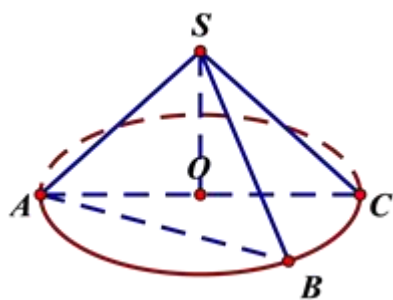
分析：作出示意图，根据条件分别求出圆锥的母线 SA ，高 SO ，底面圆半径 AO 的长，代入公式计算即可。

详解：如下图所示， $\angle SAO = 30^\circ, \angle ASB = 90^\circ$

$$\text{又 } S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB = \frac{1}{2} SA^2 = 8,$$

$$\text{解得 } SA = 4, \text{ 所以 } SO = \frac{1}{2} SA = 2, AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以该圆锥的体积为 } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OA^2 \cdot SO = 8\pi.$$



点睛：此题为填空题的压轴题，实际上并不难，关键在于根据题意作出相应图形，利用平面几何知识求解相应线段长，代入圆锥体积公式即可.

