

专题 04 导数及其应用（解答题）（理科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

【答案】(1) $(-\infty, e+1]$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】

(1) 由导数确定函数单调性及最值, 即可得解;

(2) 利用分析法, 转化要证明条件为 $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} - 2[\ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})] > 0$, 再利用导数即可得证.

(1)

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})e^x - \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x})e^x + (1 - \frac{1}{x}) = \frac{x-1}{x}(\frac{e^x}{x} + 1)$$

令 $f(x) = 0$, 得 $x = 1$

当 $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减

当 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增 $f(x) \geq f(1) = e + 1 - a$,

若 $f(x) \geq 0$, 则 $e + 1 - a \geq 0$, 即 $a \leq e + 1$

所以 a 的取值范围为 $(-\infty, e + 1]$

(2)

由题知, $f(x)$ 一个零点小于 1, 一个零点大于 1

不妨设 $x_1 < 1 < x_2$

要证 $x_1 x_2 < 1$, 即证 $x_1 < \frac{1}{x_2}$

因为 $x_1, \frac{1}{x_2} \in (0, 1)$, 即证 $f(x_1) > f(\frac{1}{x_2})$

因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 即证 $f(x_2) > f(\frac{1}{x_2})$

即证 $\frac{e^x}{x} - \ln x + x - xe^{\frac{1}{x}} - \ln x - \frac{1}{x} > 0, x \in (1, +\infty)$

即证 $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} - 2[\ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})] > 0$

下面证明 $x > 1$ 时, $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} > 0, \ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) < 0$

设 $g(x) = \frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}}, x > 1$,

$$\begin{aligned} \text{则 } g'(x) &= (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})e^x - (e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})) = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x})e^x - e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x}) \\ &= (1 - \frac{1}{x})(\frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}) = \frac{x-1}{x}(\frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}) \end{aligned}$$

设 $\varphi(x) = \frac{e^x}{x} (x > 1), \varphi'(x) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})e^x = \frac{x-1}{x^2}e^x > 0$

所以 $\varphi(x) > \varphi(1) = e$, 而 $e^{\frac{1}{x}} < e$

所以 $\frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}} > 0$, 所以 $g'(x) > 0$

所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

即 $g(x) > g(1) = 0$, 所以 $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} > 0$

令 $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}), x > 1$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2} < 0$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减

即 $h(x) < h(1) = 0$, 所以 $\ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) < 0$;

综上, $\frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}} - 2[\ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})] > 0$, 所以 $x_1 x_2 < 1$.

【点睛】

关键点点睛：本题是极值点偏移问题，关键点是通过分析法，构造函数证明不等式

$h(x) = \ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ 这个函数经常出现，需要掌握

2. **【2022 年全国乙卷】**已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$

(1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $y = 2x$

(2) $(-\infty, -1)$

【解析】

【分析】

(1) 先算出切点, 再求导算出斜率即可

(2) 求导,对 a 分类讨论,对 x 分 $(-1,0), (0,+\infty)$ 两部分研究

(1)

$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$

当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{e^x}$, $f(0)=0$,所以切点为 $(0,0)$ $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{e^x}$, $f'(0)=2$,所以切线斜率为2

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$

(2)

$$f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{e^x}$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{e^x}=\frac{e^x+a(1-x^2)}{(1+x)e^x}$$

设 $g(x)=e^x+a(1-x^2)$

1°若 $a>0$,当 $x\in(-1,0)$, $g(x)=e^x+a(1-x^2)>0$,即 $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增, $f(x)<f(0)=0$

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上没有零点,不合题意

2°若 $-1\leq a\leq 0$,当 $x\in(0,+\infty)$,则 $g'(x)=e^x-2ax>0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增所以 $g(x)>g(0)=1+a\geq 0$,即 $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(x)>f(0)=0$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点,不合题意

3°若 $a<-1$

(1)当 $x\in(0,+\infty)$,则 $g'(x)=e^x-2ax>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$$g(0)=1+a<0, g(1)=e>0$$

所以存在 $m\in(0,1)$,使得 $g(m)=0$,即 $f'(m)=0$

当 $x\in(0,m)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减

当 $x\in(m,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增

所以

当 $x\in(0,m)$, $f(x)<f(0)=0$

当 $x\rightarrow+\infty$, $f(x)\rightarrow+\infty$

所以 $f(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上有唯一零点

又 $(0,m)$ 没有零点,即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点

(2)当 $x\in(-1,0)$, $g(x)=e^x+a(1-x^2)$

设 $h(x) = g'(x) = e^x - 2ax$

$$h'(x) = e^x - 2a > 0$$

所以 $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增

$$g'(-1) = \frac{1}{e} + 2a < 0, g'(0) = 1 > 0$$

所以存在 $n \in (-1, 0)$, 使得 $g'(n) = 0$

当 $x \in (-1, n)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

当 $x \in (n, 0)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(x) < g(0) = 1 + a < 0$

$$\text{又 } g(-1) = \frac{1}{e} > 0$$

所以存在 $t \in (-1, n)$, 使得 $g(t) = 0$, 即 $f'(t) = 0$

当 $x \in (-1, t)$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (t, 0)$, $f(x)$ 单调递减

有 $x \rightarrow -1, f(x) \rightarrow -\infty$

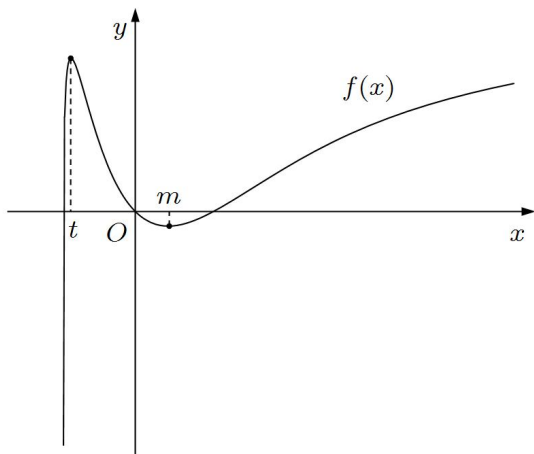
而 $f(0) = 0$, 所以当 $x \in (t, 0)$, $f(x) > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, t)$ 上有唯一零点, $(t, 0)$ 上无零点

即 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上有唯一零点

所以 $a < -1$, 符合题意

所以若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$



【点睛】

方法点睛：本题的关键是对 a 的范围进行合理分类，否定和肯定并用，否定只需要说明一边不满足即可，肯定要两方面都说明.

3. 【2022 年新高考 1 卷】已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1)求 a ;

(2)证明：存在直线 $y = b$ ，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【答案】(1) $a = 1$

(2)见解析

【解析】

【分析】

(1) 根据导数可得函数的单调性，从而可得相应的最小值，根据最小值相等可求 a . 注意分类讨论.

(2) 根据 (1) 可得当 $b > 1$ 时， $e^x - x = b$ 的解的个数、 $x - \ln x = b$ 的解的个数均为 2，构建新函数 $h(x) = e^x + \ln x - 2x$ ，利用导数可得该函数只有一个零点且可得 $f(x), g(x)$ 的大小关系，根据存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点可得 b 的取值，再根据两类方程的根的关系可证明三根成等差数列.

(1)

$f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 R ，而 $f'(x) = e^x - a$ ，

若 $a \leq 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 无最小值，故 $a > 0$.

$g(x) = ax - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，而 $g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$.

当 $x < \ln a$ 时， $f'(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上为减函数，

当 $x > \ln a$ 时， $f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上为增函数，

故 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$.

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时， $g'(x) < 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上为减函数，

当 $x > \frac{1}{a}$ 时， $g'(x) > 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上为增函数，

故 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = 1 - \ln \frac{1}{a}$.

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值，

故 $1 - \ln \frac{1}{a} = a - a \ln a$ ，整理得到 $\frac{a-1}{1+a} = \ln a$ ，其中 $a > 0$ ，

设 $g(a) = \frac{a-1}{1+a} - \ln a, a > 0$ ，则 $g'(a) = \frac{2}{(1+a)^2} - \frac{1}{a} = \frac{-a^2-1}{a(1+a)^2} \leq 0$ ，

故 $g(a)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数，而 $g(1) = 0$ ，

故 $g(a) = 0$ 的唯一解为 $a = 1$ ，故 $\frac{1-a}{1+a} = \ln a$ 的解为 $a = 1$.

综上, $a = 1$.

(2)

由 (1) 可得 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ 的最小值为 $1 - \ln 1 = 1 - \ln \frac{1}{1} = 1$.

当 $b > 1$ 时, 考虑 $e^x - x = b$ 的解的个数、 $x - \ln x = b$ 的解的个数.

设 $S(x) = e^x - x - b$, $S'(x) = e^x - 1$,

当 $x < 0$ 时, $S'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $S'(x) > 0$,

故 $S(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $S(x)_{\min} = S(0) = 1 - b < 0$,

而 $S(-b) = e^{-b} > 0$, $S(b) = e^b - 2b$,

设 $u(b) = e^b - 2b$, 其中 $b > 1$, 则 $u'(b) = e^b - 2 > 0$,

故 $u(b)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 故 $u(b) > u(1) = e - 2 > 0$,

故 $S(b) > 0$, 故 $S(x) = e^x - x - b$ 有两个不同的零点, 即 $e^x - x = b$ 的解的个数为 2.

设 $T(x) = x - \ln x - b$, $T'(x) = \frac{x-1}{x}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $T'(x) > 0$,

故 $T(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $T(x)_{\min} = T(1) = 1 - b < 0$,

而 $T(e^{-b}) = e^{-b} > 0$, $T(e^b) = e^b - 2b > 0$,

$T(x) = x - \ln x - b$ 有两个不同的零点即 $x - \ln x = b$ 的解的个数为 2.

当 $b = 1$, 由 (1) 讨论可得 $x - \ln x = b$ 、 $e^x - x = b$ 仅有一个零点,

当 $b < 1$ 时, 由 (1) 讨论可得 $x - \ln x = b$ 、 $e^x - x = b$ 均无零点,

故若存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点,

则 $b > 1$.

设 $h(x) = e^x + \ln x - 2x$, 其中 $x > 0$, 故 $h'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2$,

设 $s(x) = e^x - x - 1$, $x > 0$, 则 $s'(x) = e^x - 1 > 0$,

故 $s(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $s(x) > s(0) = 0$ 即 $e^x > x + 1$,

所以 $h'(x) > x + \frac{1}{x} - 1 \geq 2 - 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $h(1) = e - 2 > 0$, $h(\frac{1}{e^3}) = e^{\frac{1}{e^3}} - 3 - \frac{2}{e^3} < e - 3 - \frac{2}{e^3} < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点 x_0 , $\frac{1}{e^3} < x_0 < 1$ 且:

当 $0 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$ 即 $e^x - x < x - \ln x$ 即 $f(x) < g(x)$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$ 即 $e^x - x > x - \ln x$ 即 $f(x) > g(x)$,

因此若存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点,

故 $b = f(x_0) = g(x_0) > 1$,

此时 $e^x - x = b$ 有两个不同的零点 x_1, x_0 ($x_1 < 0 < x_0$),

此时 $x - \ln x = b$ 有两个不同的零点 x_0, x_4 ($0 < x_0 < 1 < x_4$),

故 $e^{x_1} - x_1 = b$, $e^{x_0} - x_0 = b$, $x_4 - \ln x_4 - b = 0$, $x_0 - \ln x_0 - b = 0$

所以 $x_4 - b = \ln x_4$ 即 $e^{x_4 - b} = x_4$ 即 $e^{x_4 - b} - (x_4 - b) - b = 0$,

故 $x_4 - b$ 为方程 $e^x - x = b$ 的解, 同理 $x_0 - b$ 也为方程 $e^x - x = b$ 的解

又 $e^{x_1} - x_1 = b$ 可化为 $e^{x_1} = x_1 + b$ 即 $x_1 - \ln(x_1 + b) = 0$ 即 $(x_1 + b) - \ln(x_1 + b) - b = 0$,

故 $x_1 + b$ 为方程 $x - \ln x = b$ 的解, 同理 $x_0 + b$ 也为方程 $x - \ln x = b$ 的解,

所以 $\{x_1, x_0\} = \{x_0 - b, x_4 - b\}$, 而 $b > 1$,

故 $\begin{cases} x_0 = x_4 - b \\ x_1 = x_0 - b \end{cases}$ 即 $x_1 + x_4 = 2x_0$.

【点睛】

思路点睛: 函数的最值问题, 往往需要利用导数讨论函数的单调性, 此时注意对参数的分类讨论, 而不同方程的根的性质, 注意利用方程的特征找到两类根之间的关系.

4. 【2022 年新高考 2 卷】已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in N^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

【答案】(1) $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0)$, 增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) $a \leq \frac{1}{2}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 求出 $f'(x)$, 讨论其符号后可得 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设 $h(x) = xe^{ax} - e^x + 1$, 求出 $h''(x)$, 先讨论 $a > \frac{1}{2}$ 时题设中的不等式不成立, 再就 $0 < a \leq$

$\frac{1}{2}$ 结合放缩法讨论 $h'(x)$ 符号, 最后就 $a \leq 0$ 结合放缩法讨论 $h(x)$ 的范围后可得参数的取值范

围.

(3) 由(2)可得 $2\ln t < t - \frac{1}{t}$ 对任意的 $t > 1$ 恒成立, 从而可得 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 对任意的 $n \in N^*$ 恒成立, 结合裂项相消法可证题设中的不等式.

(1)

当 $a = 1$ 时, $f(x) = (x-1)e^x$, 则 $f'(x) = xe^x$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0)$, 增区间为 $(0, +\infty)$.

(2)

设 $h(x) = xe^{ax} - e^x + 1$, 则 $h(0) = 0$,

又 $h'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x$, 设 $g(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x$,

则 $g'(x) = (2a+a^2x)e^{ax} - e^x$,

若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $g'(0) = 2a - 1 > 0$,

因为 $g'(x)$ 为连续不间断函数,

故存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $\forall x \in (0, x_0)$, 总有 $g'(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 为增函数, 故 $g(x) > g(0) = 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 为增函数, 故 $h(x) > h(0) = -1$, 与题设矛盾.

若 $0 < a \leq \frac{1}{2}$, 则 $h'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x = e^{ax+\ln(1+ax)} - e^x$,

下证: 对任意 $x > 0$, 总有 $\ln(1+x) < x$ 成立,

证明: 设 $S(x) = \ln(1+x) - x$, 故 $S'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$,

故 $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 故 $S(x) < S(0) = 0$ 即 $\ln(1+x) < x$ 成立.

由上述不等式有 $e^{ax+\ln(1+ax)} - e^x < e^{ax+ax} - e^x = e^{2ax} - e^x \leq 0$,

故 $h'(x) \leq 0$ 总成立, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

所以 $h(x) < h(0) = -1$.

当 $a \leq 0$ 时, 有 $h'(x) = e^{ax} - e^x + axe^{ax} < 1 - 1 + 0 = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 所以 $h(x) < h(0) = -1$.

综上, $a \leq \frac{1}{2}$.

(3)

取 $a = \frac{1}{2}$, 则 $\forall x > 0$, 总有 $xe^{\frac{1}{2}x} - e^x + 1 < 0$ 成立,

令 $t = e^{\frac{1}{2}x}$, 则 $t > 1, t^2 = e^x, x = 2\ln t$,

故 $2t\ln t < t^2 - 1$ 即 $2\ln t < t - \frac{1}{t}$ 对任意的 $t > 1$ 恒成立.

所以对任意的 $n \in N^*$, 有 $2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}} < \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}$,

整理得到: $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

故 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n$

$= \ln(n+1)$,

故不等式成立.

【点睛】

思路点睛: 函数参数的不等式的恒成立问题, 应该利用导数讨论函数的单调性, 注意结合端点处导数的符号合理分类讨论, 导数背景下数列不等式的证明, 应根据已有的函数不等式合理构建数列不等式.

5. 【2021 年甲卷理科】已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left(0, \frac{2}{\ln 2}\right]$ 上单调递增; $\left[\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ 上单调递减; (2) $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

【解析】

【分析】

(1) 求得函数的导函数, 利用导函数的正负与函数的单调性的关系即可得到函数的单调性;

(2) 方法一: 利用指数对数的运算法则, 可以将曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交

点等价转化为方程 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$ 有两个不同的实数根, 即曲线 $y = g(x)$ 与直线 $y = \frac{a}{\ln a}$ 有两个交

点, 利用导函数研究 $g(x)$ 的单调性, 并结合 $g(x)$ 的正负, 零点和极限值分析 $g(x)$ 的图象,

进而得到 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$, 发现这正好是 $0 < g(a) < g(e)$, 然后根据 $g(x)$ 的图象和单调性得到 a

的取值范围.

【详解】

(1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=\frac{x^2}{2^x}, f'(x)=\frac{2x \cdot 2^x - x^2 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{x \cdot 2^x (2 - x \ln 2)}{4^x}$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{\ln 2}$, 当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \frac{2}{\ln 2}$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{\ln 2}\right]$ 上单调递增; $\left[\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ 上单调递减;

(2) [方法一] 【最优解】: 分离参数

$$f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1 \Leftrightarrow a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}, \text{ 设函数 } g(x)=\frac{\ln x}{x},$$

则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $g'(x)=0$, 得 $x=e$,

在 $(0, e)$ 内 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

在 $(e, +\infty)$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

$$\therefore g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e},$$

又 $g(1)=0$, 当 x 趋近于 $+\infty$ 时, $g(x)$ 趋近于 0 ,

所以曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点, 即曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\frac{a}{\ln a}$ 有两个交

点的充分必要条件是 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$, 这即是 $0 < g(a) < g(e)$,

所以 a 的取值范围是 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

[方法二]: 构造差函数

由 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点知 $f(x)=1$, 即 $x^a=a^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有两个解,

取对数得方程 $a \ln x = x \ln a$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有两个解.

构造函数 $g(x)=a \ln x - x \ln a, x \in (0, +\infty)$, 求导数得 $g'(x)=\frac{a}{x} - \ln a = \frac{a - x \ln a}{x}$.

当 $0 < a < 1$ 时, $\ln a < 0, x \in (0, +\infty), a - x \ln a > 0, g'(x) > 0, g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 所以,

$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内最多只有一个零点, 不符合题意;

当 $a > 1$ 时, $\ln a > 0$, 令 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{a}{\ln a}$, 当 $x \in \left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\frac{a}{\ln a}, +\infty\right)$ 时,

$g'(x) < 0$; 所以, 函数 $g(x)$ 的递增区间为 $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$, 递减区间为 $\left(\frac{a}{\ln a}, +\infty\right)$.

由于 $0 < e^{-\frac{1}{a}} < 1 < \frac{a}{\ln a}, g\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = -1 - e^{-\frac{1}{a}} \ln a < 0$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有 $a \ln x < x \ln a$, 即 $g(x) < 0$, 由函数 $g(x) = a \ln x - x \ln a$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个零

点知 $g\left(\frac{a}{\ln a}\right) = a\left(\ln \frac{a}{\ln a} - 1\right) > 0$, 所以 $\frac{a}{\ln a} > e$, 即 $a - e \ln a > 0$.

构造函数 $h(a) = a - e \ln a$, 则 $h'(a) = 1 - \frac{e}{a} = \frac{a-e}{a}$, 所以 $h(a)$ 的递减区间为 $(1, e)$, 递增区间为

$(e, +\infty)$, 所以 $h(a) \geq h(e) = 0$, 当且仅当 $a = e$ 时取等号, 故 $h(a) > 0$ 的解为 $a > 1$ 且 $a \neq e$.

所以, 实数 a 的取值范围为 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

[方法三]分离法: 一曲一直

曲线 $y = f(x)$ 与 $y = 1$ 有且仅有两个交点等价于 $\frac{x^a}{a^x} = 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有两个不相同的解.

因为 $x^a = a^x$, 所以两边取对数得 $a \ln x = x \ln a$, 即 $\ln x = \frac{x \ln a}{a}$, 问题等价于 $g(x) = \ln x$ 与

$p(x) = \frac{x \ln a}{a}$ 有且仅有两个交点.

①当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{\ln a}{a} < 0$, $p(x)$ 与 $g(x)$ 只有一个交点, 不符合题意.

②当 $a > 1$ 时, 取 $g(x) = \ln x$ 上一点 $(x_0, \ln x_0)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x_0) = \frac{1}{x_0}$, $g(x)$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 的切线

方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 即 $y = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0$.

当 $y = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0$ 与 $p(x) = \frac{x \ln a}{a}$ 为同一直线时有 $\begin{cases} \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{x_0}, \\ \ln x_0 - 1 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{e}, \\ x_0 = e. \end{cases}$

直线 $p(x) = \frac{x \ln a}{a}$ 的斜率满足: $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$ 时, $g(x) = \ln x$ 与 $p(x) = \frac{x \ln a}{a}$ 有且仅有两个交点.

记 $h(a) = \frac{\ln a}{a}$, $h'(a) = \frac{1 - \ln a}{a^2}$, 令 $h'(a) = 0$, 有 $a = e$. $a \in (1, e)$, $h'(a) > 0$, $h(a)$ 在区间 $(1, e)$ 内单

调递增; $a \in (e, +\infty)$, $h'(a) < 0$, $h(a)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 内单调递减; $a = e$ 时, $h(a)$ 最大值为 $g(e) = \frac{1}{e}$,

所当 $a > 1$ 且 $a \neq e$ 时有 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

[方法四]: 直接法

$f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$, $f'(x) = \frac{ax^{a-1} \cdot a^x - a^x \ln a \cdot x^a}{(a^x)^2} = \frac{x^{a-1}(a - x \ln a)}{a^x}$.

因为 $x > 0$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{a}{\ln a}$.

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 不满足题意;

当 $a > 1$ 时, $\frac{a}{\ln a} > 0$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{a}{\ln a}$, $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$ 内单调递增, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > \frac{a}{\ln a}$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{a}{\ln a}, +\infty\right)$ 内单调递减.

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 所以 $f\left(\frac{a}{\ln a}\right) > 1$, 即 $\frac{\left(\frac{a}{\ln a}\right)^a}{a^{\frac{a}{\ln a}}} = \frac{a^{\frac{a}{\ln a}}}{(\ln a)^a} > 1$, 即

$a^{\frac{a}{\ln a}} > (\ln a)^a, a^{\frac{1}{\ln a}} > \ln a$, 两边取对数, 得 $\left(1 - \frac{1}{\ln a}\right) \ln a > \ln(\ln a)$, 即 $\ln a - 1 > \ln(\ln a)$.

令 $\ln a = t$, 则 $t - 1 > \ln t$, 令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递减, 所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 所以 $t - 1 \geq \ln t$, 则 $t - 1 > \ln t$ 的解为 $t \neq 1$, 所以 $\ln a \neq 1$, 即 $a \neq e$.

故实数 a 的范围为 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

【整体点评】

本题考查利用导数研究函数的单调性, 根据曲线和直线的交点个数求参数的取值范围问题, 属较难试题,

方法一: 将问题进行等价转化, 分离参数, 构造函数, 利用导数研究函数的单调性和最值, 图象, 利用数形结合思想求解.

方法二: 将问题取对, 构造差函数, 利用导数研究函数的单调性和最值.

方法三: 将问题取对, 分成 $g(x) = \ln x$ 与 $p(x) = \frac{x \ln a}{a}$ 两个函数, 研究对数函数过原点的切线问题, 将切线斜率与一次函数的斜率比较得到结论.

方法四: 直接求导研究极值, 单调性, 最值, 得到结论.

6. 【2021 年乙卷理科】设函数 $f(x) = \ln(a - x)$, 已知 $x = 0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x + f(x)}{xf(x)}$. 证明: $g(x) < 1$.

【答案】(1) $a = 1$; (2) 证明见详解

【解析】

【分析】

(1) 由题意求出 y' , 由极值点处导数为 0 即可求解出参数 a ;

(2) 由(1)得 $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)}$, $x < 1$ 且 $x \neq 0$, 分类讨论 $x \in (0, 1)$ 和 $x \in (-\infty, 0)$, 可等价

转化为要证 $g(x) < 1$, 即证 $x + \ln(1-x) > x \ln(1-x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 和 $x \in (-\infty, 0)$ 上恒成立, 结合导数和换元法即可求解

【详解】

(1) 由 $f(x) = \ln(a-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-a}$, $y = xf(x) \Rightarrow y' = \ln(a-x) + \frac{x}{x-a}$,

又 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点, 所以 $y'(0) = \ln a = 0$, 解得 $a=1$;

(2) [方法一]: 转化为有分母的函数

由(1)知, $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} = \frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x}$, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

要证 $g(x) < 1$, 即证 $\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} < 1$, 即证 $\frac{1}{\ln(1-x)} < 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

(i) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\frac{1}{\ln(1-x)} < 0$, $\frac{x-1}{x} < 0$, 即证 $\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$. 令 $F(x) = \ln(1-x) - \frac{x}{x-1}$,

因为 $F'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2} > 0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内为增函数, 所以

$F(x) > F(0) = 0$.

(ii) 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $\frac{1}{\ln(1-x)} > 0$, $\frac{x-1}{x} > 0$, 即证 $\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$, 由(i)分析知 $F(x)$ 在

区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 所以 $F(x) > F(0) = 0$.

综合(i)(ii)有 $g(x) < 1$.

[方法二] 【最优解】: 转化为无分母函数

由(1)得 $f(x) = \ln(1-x)$, $g(x) = \frac{x + f(x)}{xf(x)} = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)}$, $x < 1$ 且 $x \neq 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, 要证 $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} < 1$, $\because x > 0, \ln(1-x) < 0$, $\therefore x \ln(1-x) < 0$, 即证

$x + \ln(1-x) > x \ln(1-x)$, 化简得 $x + (1-x) \ln(1-x) > 0$;

同理, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 要证 $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} < 1$, $\because x < 0, \ln(1-x) > 0$, $\therefore x \ln(1-x) < 0$, 即

证 $x + \ln(1-x) > x \ln(1-x)$, 化简得 $x + (1-x) \ln(1-x) > 0$;

令 $h(x) = x + (1-x) \ln(1-x)$, 再令 $t = 1-x$, 则 $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x = 1-t$,

令 $\varphi(t) = 1 - t + t \ln t$, $\varphi'(t) = -1 + \ln t + 1 = \ln t$,

当 $t \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(t) < 0$, $\varphi(t)$ 单减, 故 $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$;

当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单增, 故 $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$;

综上所述, $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} < 1$ 在 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 恒成立.

[方法三]: 利用导数不等式中的常见结论证明

令 $\varphi(x) = \ln x - (x - 1)$, 因为 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内是增函数, 在区间 $(1, +\infty)$ 内是减函数, 所以 $\varphi(x) \leq \varphi(1) = 0$, 即 $\ln x \leq x - 1$ (当且仅当 $x = 1$ 时取等号). 故当 $x < 1$ 且 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{1-x} > 0$ 且 $\frac{1}{1-x} \neq 1$, $\ln \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-x} - 1$, 即 $-\ln(1-x) < \frac{x}{1-x}$, 所以 $\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$.

(i) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $0 > \ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$, 所以 $\frac{1}{\ln(1-x)} < \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, 即 $\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} < 1$, 所以 $g(x) < 1$.

(ii) 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $\ln(1-x) > \frac{x}{x-1} > 0$, 同理可证得 $g(x) < 1$.

综合 (i) (ii) 得, 当 $x < 1$ 且 $x \neq 0$ 时, $\frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} < 1$, 即 $g(x) < 1$.

【整体点评】

(2) 方法一利用不等式的性质分类转化分式不等式: 当 $x \in (0, 1)$ 时, 转化为证明

$\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 转化为证明 $\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$, 然后构造函数, 利用导数研究

单调性, 进而证得; 方法二利用不等式的性质分类讨论分别转化为整式不等式: 当 $x \in (0, 1)$

时, $x + (1-x)\ln(1-x) > 0$ 成立和当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $x + (1-x)\ln(1-x) > 0$ 成立, 然后换元构造,

利用导数研究单调性进而证得, 通性通法, 运算简洁, 为最优解; 方法三先构造函数

$\varphi(x) = \ln x - (x - 1)$, 利用导数分析单调性, 证得常见常用结论 $\ln x \leq x - 1$ (当且仅当 $x = 1$ 时取等号). 然后换元得到 $\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}$, 分类讨论, 利用不等式的基本性质证得要证得不

等式, 有一定的巧合性.

7. 【2021 年新高考 1 卷】已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

【答案】(1) $f(x)$ 的递增区间为 $(0,1)$ ，递减区间为 $(1,+\infty)$ ；(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 首先确定函数的定义域，然后求得导函数的解析式，由导函数的符号即可确定原函数的单调性.

(2) 方法二：将题中的等式进行恒等变换，令 $\frac{1}{a}=m, \frac{1}{b}=n$ ，命题转换为证明： $2 < m+n < e$ ，

然后构造对称差函数，结合函数零点的特征和函数的单调性即可证得题中的结论.

【详解】

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f(x)=x(1-\ln x)$ 得， $f'(x)=-\ln x$ ，

当 $x=1$ 时， $f'(x)=0$ ；当 $x \in (0,1)$ 时 $f'(x)>0$ ；当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 内为增函数，在区间 $[1,+\infty)$ 内为减函数，

(2)[方法一]：等价转化

由 $b \ln a - a \ln b = a - b$ 得 $\frac{1}{a}(1 - \ln \frac{1}{a}) = \frac{1}{b}(1 - \ln \frac{1}{b})$ ，即 $f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{b})$.

由 $a^1 > b$ ，得 $\frac{1}{a} \neq \frac{1}{b}$.

由 (1) 不妨设 $\frac{1}{a} \in (0,1), \frac{1}{b} \in (1,+\infty)$ ，则 $f(\frac{1}{a})>0$ ，从而 $f(\frac{1}{b})>0$ ，得 $\frac{1}{b} \in (1,e)$ ，

①令 $g(x)=f(2-x)-f(x)$ ，

则 $g'(x)=-f'(2-x)-f'(x)=\ln(2-x)+\ln x=\ln(2x-x^2)=\ln[1-(x-1)^2]$ ，

当 $x \in (0,1)$ 时， $g'(x)<0$ ， $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内为减函数， $g(x)>g(1)=0$ ，

从而 $f(2-x)>f(x)$ ，所以 $f(2-\frac{1}{a})>f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$ ，

由 (1) 得 $2-\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 即 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. ①

令 $h(x)=x+f(x)$ ，则 $h'(x)=1+f'(x)=1-\ln x$ ，

当 $x \in (1,e)$ 时， $h'(x)>0$ ， $h(x)$ 在区间 $(1,e)$ 内为增函数， $h(x)<h(e)=e$ ，

从而 $x+f(x)<e$ ，所以 $\frac{1}{b}+f(\frac{1}{b})<e$.

又由 $\frac{1}{a} \in (0,1)$ ，可得 $\frac{1}{a} < \frac{1}{a}(1 - \ln \frac{1}{a}) = f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{b})$ ，

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < f(\frac{1}{b}) + \frac{1}{b} = e$ 。②

由①②得 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 。

[方法二] 【最优解】: $b \ln a - a \ln b = a - b$ 变形为 $\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ ，所以 $\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b}$ 。

令 $\frac{1}{a} = m, \frac{1}{b} = n$ 。则上式变为 $m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n)$ ，

于是命题转换为证明: $2 < m + n < e$ 。

令 $f(x) = x(1 - \ln x)$ ，则有 $f(m) = f(n)$ ，不妨设 $m < n$ 。

由(1)知 $0 < m < 1, 1 < n < e$ ，先证 $m + n > 2$ 。

要证: $m + n > 2 \Leftrightarrow n > 2 - m \Leftrightarrow f(n) < f(2 - m) \Leftrightarrow f(m) < f(2 - m)$

$\Leftrightarrow f(m) - f(2 - m) < 0$ 。

令 $g(x) = f(x) - f(2 - x), x \in (0,1)$ ，

则 $g'(x) = f'(x) + f'(2 - x) = -\ln x - \ln(2 - x) = -\ln[x(2 - x)] \geq -\ln 1 = 0$ ，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，所以 $g(x) < g(1) = 0$ ，即 $m + n > 2$ 。

再证 $m + n < e$ 。

因为 $m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n) > m$ ，所以 $n(1 - \ln n) + n < e \Rightarrow m + n < e$ 。

令 $h(x) = x(1 - \ln x) + x, x \in (1, e)$ ，

所以 $h'(x) = 1 - \ln x > 0$ ，故 $h(x)$ 在区间 $(1, e)$ 内单调递增。

所以 $h(x) < h(e) = e$ 。故 $h(n) < e$ ，即 $m + n < e$ 。

综合可知 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 。

[方法三]: 比值代换

证明 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$ 同证法 2。以下证明 $x_1 + x_2 < e$ 。

不妨设 $x_2 = tx_1$ ，则 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$ ，

由 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2)$ 得 $x_1(1 - \ln x_1) = tx_1[1 - \ln(tx_1)]$ ， $\ln x_1 = 1 - \frac{t \ln t}{t - 1}$ ，

要证 $x_1 + x_2 < e$ ，只需证 $(1+t)x_1 < e$ ，两边取对数得 $\ln(1+t) + \ln x_1 < 1$ ，

$$\text{即 } \ln(1+t) + 1 - \frac{t \ln t}{t-1} < 1,$$

$$\text{即证 } \frac{\ln(1+t)}{t} < \frac{\ln t}{t-1}.$$

$$\text{记 } g(s) = \frac{\ln(1+s)}{s}, s \in (0, +\infty), \text{ 则 } g'(s) = \frac{\frac{s}{1+s} - \ln(1+s)}{s^2}.$$

$$\text{记 } h(s) = \frac{s}{1+s} - \ln(1+s), \text{ 则 } h'(s) = \frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{1+s} < 0,$$

所以， $h(s)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减。 $h(s) < h(0) = 0$ ，则 $g'(s) < 0$ ，

所以 $g(s)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减。

由 $t \in (1, +\infty)$ 得 $t-1 \in (0, +\infty)$ ，所以 $g(t) < g(t-1)$ ，

$$\text{即 } \frac{\ln(1+t)}{t} < \frac{\ln t}{t-1}.$$

[方法四]：构造函数法

$$\text{由已知得 } \frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \text{ 令 } \frac{1}{a} = x_1, \frac{1}{b} = x_2,$$

不妨设 $x_1 < x_2$ ，所以 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

由 (I) 知， $0 < x_1 < 1 < x_2 < e$ ，只需证 $2 < x_1 + x_2 < e$ 。

证明 $x_1 + x_2 > 2$ 同证法 2。

$$\text{再证明 } x_1 + x_2 < e. \text{ 令 } h(x) = \frac{1 - \ln x}{x - e} (0 < x < e), h'(x) = \frac{-2 + \frac{e}{x} + \ln x}{(x - e)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \ln x + \frac{e}{x} - 2 (0 < x < e), \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x - e}{x^2} < 0.$$

所以 $\varphi(x) > \varphi(e) = 0, h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 在区间 $(0, e)$ 内单调递增。

$$\text{因为 } 0 < x_1 < x_2 < e, \text{ 所以 } \frac{1 - \ln x_1}{x_1 - e} < \frac{1 - \ln x_2}{x_2 - e}, \text{ 即 } \frac{1 - \ln x_1}{1 - \ln x_2} > \frac{x_1 - e}{x_2 - e}$$

$$\text{又因为 } f(x_1) = f(x_2), \text{ 所以 } \frac{1 - \ln x_1}{1 - \ln x_2} = \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} > \frac{x_1 - e}{x_2 - e},$$

$$\text{即 } x_2^2 - ex_2 < x_1^2 - ex_1, (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - e) > 0.$$

$$\text{因为 } x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_1 + x_2 < e, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e.$$

综上, 有 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 结论得证.

【整体点评】

(2)方法一: 等价转化是处理导数问题的常见方法, 其中利用的对称差函数, 构造函数的思想, 这些都是导数问题必备的知识和技能.

方法二: 等价转化是常见的数学思想, 构造对称差函数是最基本的极值点偏移问题的处理策略.

方法三: 比值代换是一种将双变量问题化为单变量问题的有效途径, 然后构造函数利用函数的单调性证明题中的不等式即可.

方法四: 构造函数之后想办法出现关于 $x_1 + x_2 - e < 0$ 的式子, 这是本方法证明不等式的关键思想所在.

8. 【2021 年新高考 2 卷】已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 只有一个零点

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$;

② $0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a$.

【答案】(1)答案见解析; (2)证明见解析.

【解析】

【分析】

(1)首先求得导函数的解析式, 然后分类讨论确定函数的单调性即可;

(2)由题意结合(1)中函数的单调性和函数零点存在定理即可证得题中的结论.

【详解】

(1)由函数的解析式可得: $f'(x) = x(e^x - 2a)$,

当 $a \leq 0$ 时, 若 $x \in (-\infty, 0)$, 则 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 若 $x \in (-\infty, \ln(2a))$, 则 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

若 $x \in (\ln(2a), 0)$, 则 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0, f(x)$ 在 R 上单调递增;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 若 $x \in (-\infty, 0)$, 则 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

若 $x \in (0, \ln(2a))$, 则 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

若 $x \in (\ln(2a), +\infty)$, 则 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

(2)若选择条件①:

由于 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, 故 $1 < 2a \leq e^2$, 则 $b > 2a > 1, f(0) = b - 1 > 0$,

$$\text{而 } f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \left(-1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)e^{-\sqrt{\frac{b}{a}}} - b + b < 0,$$

而函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 故函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点.

$$f(\ln(2a)) = 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + b$$

$$> 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + 2a$$

$$= 2a \ln(2a) - a[\ln(2a)]^2$$

$$= a \ln(2a)[2 - \ln(2a)],$$

由于 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, $1 < 2a \leq e^2$, 故 $a \ln(2a)[2 - \ln(2a)] \geq 0$,

结合函数的单调性可知函数在区间 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

综上所述, 题中的结论成立.

若选择条件②:

由于 $0 < a < \frac{1}{2}$, 故 $2a < 1$, 则 $f(0) = b - 1 \leq 2a - 1 < 0$,

当 $b \geq 0$ 时, $e^2 > 4, 4a < 2$, $f(2) = e^2 - 4a + b > 0$,

而函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故函数在区间 $(0, +\infty)$ 上有一个零点.

当 $b < 0$ 时, 构造函数 $H(x) = e^x - x - 1$, 则 $H'(x) = e^x - 1$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $H'(x) < 0, H(x)$ 单调递减,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $H'(x) > 0, H(x)$ 单调递增,

注意到 $H(0) = 0$, 故 $H(x) \geq 0$ 恒成立, 从而有: $e^x \geq x+1$, 此时:

$$f(x) = (x-1)e^x - ax^2 - b \geq (x-1)(x+1) - ax^2 + b = (1-a)x^2 + (b-1),$$

当 $x > \sqrt{\frac{1-b}{1-a}}$ 时, $(1-a)x^2 + (b-1) > 0$,

取 $x_0 = \sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1$, 则 $f(x_0) > 0$,

即: $f(0) < 0, f\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right) > 0$,

而函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故函数在区间 $(0, +\infty)$ 上有一个零点.

$$f(\ln(2a)) = 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + b$$

$$\leq 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + 2a$$

$$= 2a \ln(2a) - a[\ln(2a)]^2$$

$$= a \ln(2a)[2 - \ln(2a)],$$

由于 $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < 2a < 1$, 故 $a \ln(2a)[2 - \ln(2a)] < 0$,

结合函数的单调性可知函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上没有零点.

综上所述, 题中的结论成立.

【点睛】

导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具, 而函数是高中数学中重要的知识点, 所以在历届高考中, 对导数的应用的考查都非常突出, 对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行: (1)考查导数的几何意义, 往往与解析几何、微积分相联系. (2)利用导数求函数的单调区间, 判断单调性; 已知单调性, 求参数. (3)利用导数求函数的最值(极值), 解决生活中的优化问题. (4)考查数形结合思想的应用.

9. 【2020 年新课标 1 卷理科】已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$

单调递增. (2) $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty \right)$

【解析】

【分析】

(1) 由题意首先对函数二次求导, 然后确定导函数的符号, 最后确定原函数的单调性即可.

(2) 方法一: 首先讨论 $x=0$ 的情况, 然后分离参数, 构造新函数, 结合导函数研究构造所得的函数的最大值即可确定实数 a 的取值范围.

【详解】

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x + x^2 - x$, $f'(x) = e^x + 2x - 1$,

由于 $f''(x) = e^x + 2 > 0$, 故 $f'(x)$ 单调递增, 注意到 $f'(0) = 0$, 故:

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

(2) [方法一] 【最优解】: 分离参数

由 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 得, $e^x + ax^2 - x \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 其中 $x \geq 0$,

①. 当 $x=0$ 时, 不等式为: $1 \geq 1$, 显然成立, 符合题意;

②. 当 $x > 0$ 时, 分离参数 a 得, $a \geq \frac{e^x - \frac{1}{2}x^3 - x - 1}{x^2}$,

记 $g(x) = \frac{e^x - \frac{1}{2}x^3 - x - 1}{x^2}$, $g'(x) = \frac{(x-2)\left(e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)}{x^3}$,

令 $h(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 (x \geq 0)$,

则 $h'(x) = e^x - x - 1$, $h''(x) = e^x - 1 \geq 0$,

故 $h'(x)$ 单调递增, $h'(x) \geq h'(0) = 0$,

故函数 $h(x)$ 单调递增, $h(x) \geq h(0) = 0$,

由 $h(x) \geq 0$ 可得: $e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \geq 0$ 恒成立,

故当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

因此, $[g(x)]_{\max} = g(2) = \frac{7-e^2}{4}$,

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$.

[方法二]: 特值探路

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 恒成立 $\Rightarrow f(2) \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{7-e^2}{4}$.

只需证当 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 恒成立.

当 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$ 时, $f(x) = e^x + ax^2 - x \geq e^x + \frac{7-e^2}{4} \cdot x^2 - x$.

只需证明 $e^x + \frac{7-e^2}{4}x^2 - x \geq \frac{1}{2}x^3 + 1 (x \geq 0)$ ⑤式成立.

$$\text{⑤式} \Leftrightarrow \frac{(e^2-7)x^2 + 4x + 2x^3 + 4}{e^x} \leq 4,$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{(e^2-7)x^2 + 4x + 2x^3 + 4}{e^x} (x \geq 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{(13-e^2)x^2 + 2(e^2-9)x - 2x^3}{e^x} = \frac{-x[2x^2 - (13-e^2)x - 2(e^2-9)]}{e^x} =$$

$$\frac{-x(x-2)[2x + (e^2-9)]}{e^x},$$

所以当 $x \in \left[0, \frac{9-e^2}{2}\right]$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(\frac{9-e^2}{2}, 2\right)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

从而 $[h(x)]_{\max} = \max\{h(0), h(2)\} = 4$, 即 $h(x) \leq 4$, ⑤式成立.

所以当 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 恒成立.

综上 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$.

[方法三]: 指数集中

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 恒成立 $\Rightarrow e^x \geq \frac{1}{2}x^3 + 1 - ax^2 + x \Rightarrow (\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1)e^{-x} \leq 1$,

记 $g(x) = (\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1)e^{-x} (x \geq 0)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1 - \frac{3}{2}x^2 + 2ax - 1)e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2}x[x^2 - (2a+3)x + 4a+2]e^{-x} = -\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2), \end{aligned}$$

①. 当 $2a+1 \leq 0$ 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

又 $g(0) = 1$, 所以当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x) > 1$, 不合题意;

②. 若 $0 < 2a+1 < 2$ 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时, 则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递

减, 当 $x \in (2a+1, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 又 $g(0) = 1$,

所以若满足 $g(x) \leq 1$, 只需 $g(2) \leq 1$, 即 $g(2) = (7-4a)e^{-2} \leq 1 \Rightarrow a \geq \frac{7-e^2}{4}$, 所以当

$\Rightarrow \frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \leq 1$ 成立;

③. 当 $2a+1 \geq 2$ 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = (\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1)e^{-x} \leq (\frac{1}{2}x^3 + x + 1)e^{-x}$, 又由②可知

$\frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \leq 1$ 成立, 所以 $a = 0$ 时, $g(x) = (\frac{1}{2}x^3 + x + 1)e^{-x} \leq 1$ 恒成立,

所以 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 满足题意.

综上, $a \geq \frac{7-e^2}{4}$.

【整体点评】

导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具, 而函数是高中数学中重要的知识点, 本题主要考查利用导数解决恒成立问题, 常用方法技巧有:

方法一, 分离参数, 优势在于分离后的函数是具体函数, 容易研究;

方法二, 特值探路属于小题方法, 可以快速缩小范围甚至得到结果, 但是解答题需要证明, 具有风险性;

方法三, 利用指数集中, 可以在求导后省去研究指数函数, 有利于进行分类讨论, 具有一定的技巧性!

10. 【2020 年新课标 2 卷理科】已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \dots \sin^2 2nx \leq \frac{3^n}{4^n}$.

【答案】(1) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 当 $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

(2) 证明见解析;

(3) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 首先求得导函数的解析式, 然后由导函数的零点确定其在各个区间上的符号, 最后确定原函数的单调性即可;

(2) [方法一] 由题意将所给的式子进行变形, 利用四元基本不等式即可证得题中的不等式;

(3) [方法一] 将所给的式子进行恒等变形, 构造出(2)的形式, 利用(2)的结论即可证得题中的不等式.

【详解】

(1) 由函数的解析式可得: $f(x) = 2\sin^3 x \cos x$, 则:

$$f'(x) = 2(3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x) = 2\sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 2\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = 2\sin^2 x(2\cos x + 1)(2\cos x - 1),$$

$$f'(x) = 0 \text{ 在 } x \in (0, \pi) \text{ 上的根为: } x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3},$$

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

(2) [方法一] **【最优解】**: 基本不等式法

由四元均值不等式可得

$$[f(x)]^2 = \sin^4 x \cdot \sin^2 2x = 4\sin^6 x \cdot \cos^2 x = \frac{4}{3}\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot 3\cos^2 x \leq \frac{4}{3}.$$

$$\left(\frac{\sin^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x + 3\cos^2 x}{4}\right)^4 = \frac{27}{64}, \text{ 当且仅当 } \sin^2 x = 3\cos^2 x,$$

即 $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ 或 $x = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时等号成立.

所以 $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

[方法二]: 构造新函数+齐次化方法

因为 $f(x) = 2\sin^3 x \cos x = \frac{2\sin^3 x \cos x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2} = \frac{2\tan^3 x}{(\tan^2 x + 1)^2}$, 令 $\tan x = t (t \geq 0)$, 则问题转化为

求 $g(t) = \frac{2t^3}{(t^2 + 1)^2} (t \geq 0)$ 的最大值.

求导得 $g'(t) = \frac{2t^2(t^2 + 1)(3 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$, 令 $g'(t) = 0$, 得 $t = \sqrt{3}$.

当 $t \in (0, \sqrt{3})$ 时, $g'(t) > 0$, 函数 $g(t)$ 单调递增;

当 $t \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $g'(t) < 0$, 函数 $g(t)$ 单调递减.

所以函数 $g(t)$ 的最大值为 $g(\sqrt{3}) = \frac{2 \times 3\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, 故 $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

[方法三]: 结合函数的周期性进行证明

注意到 $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) \sin[2(x + \pi)] = \sin^2 x \sin 2x = f(x)$,

故函数 $f(x)$ 是周期为 π 的函数,

结合(1)的结论, 计算可得: $f(0) = f(\pi) = 0$,

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

据此可得: $[f(x)]_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $[f(x)]_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$,

即 $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(3)[方法一] 【最优解】: 利用(2)的结论

由于 $(\sin^2 x \sin^2 2x \cdots \sin^2 2^{n-1} x)^{\frac{3}{2}} = |\sin^3 x \sin^3 2x \cdots \sin^3 2^{n-1} x| =$

$$|\sin x| |\sin^2 x \sin^3 2x \cdots \sin^3 2^{n-1} x \sin^2 2^n x| = |\sin x| |f(x)f(2x) \cdots f(2^{n-1}x)| |\sin^2 2^n x| \leq$$

$$|f(x)f(2x)\cdots f(2^{n-1}x)|,$$

$$\text{所以 } \sin^2 x \sin^2 2x \cdots \sin^2 2^n x \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{\frac{2n}{3}} = \frac{3^n}{4^n}.$$

[方法二]: 数学归纳法+放缩

当 $n=1$ 时, $\sin^2 x \cdot \sin^2 2x = \sin^2 x \sin 2x \sin 2x \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \sin 2x \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3}{4}$, 显然成立;

假设当 $n=k$ 时原式成立, 即 $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^k x \leq \frac{3^k}{4^k}$.

那么, 当 $n=k+1$ 时, 有

$$\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^k x \sin^2 2^{k+1} x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot 4 \cdot \sin^2 2^k x \cdot \cos^2 2^k x \leq$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{2\cos 2^k x}{\sin 2^k x} \cdot 2\sin^3 2^k x \cdot \cos 2^k x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{2\cos 2^k x}{\sin 2^k x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \frac{\sqrt{3}}{\tan 2^k x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

综上所述, 不等式对所有的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立.

【整体点评】

(2)方法一: 基本不等式是证明不等式的重要工具, 利用基本不等式解题时一定要注意等号成立的条件;

方法二: 齐次化之后切化弦是一种常用的方法, 它将原问题转化为一元函数的问题, 然后构造函数即可证得题中的不等式;

方法三: 周期性是三角函数的重要特征, 结合函数的周期性和函数的最值证明不等式充分体现了三角函数有界限的应用.

(3)方法一: 利用(2)的结论体现了解答题的出题思路, 逐问递进是解答题常见的设问方式;

方法二: 数学归纳法是处理与自然数有关的命题的常见策略, 放缩法是不等式证明中常见的方法.

11. 【2020 年新课标 3 卷理科】设函数 $f(x) = x^3 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1) 求 b .

(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

【答案】(1) $b = -\frac{3}{4}$; (2) 证明见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用导数的几何意义得到 $f'(\frac{1}{2})=0$ ，解方程即可；

(2) 方法一：由 (1) 可得 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=2(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ ，易知 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ， $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(-1)=c-\frac{1}{4}$ ， $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}$ ， $f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}$ ， $f(1)=c+\frac{1}{4}$ ，采用反证法，推出矛盾即可。

【详解】

(1) 因为 $f'(x)=3x^2+b$ ，由题意， $f'(\frac{1}{2})=0$ ，即： $3\times(\frac{1}{2})^2+b=0$ ，则 $b=-\frac{3}{4}$ 。

(2) [方法一]：通性通法

由 (1) 可得 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$ ， $f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ ，

令 $f'(x)>0$ ，得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$ ；令 $f'(x)<0$ ，得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ， $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-1)=c-\frac{1}{4}$ ， $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}$ ， $f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}$ ， $f(1)=c+\frac{1}{4}$ ，

若 $f(x)$ 所有零点中存在一个绝对值大于 1 的零点 x_0 ，则 $f(-1)>0$ 或 $f(1)<0$ ，

即 $c>\frac{1}{4}$ 或 $c<-\frac{1}{4}$ 。

当 $c>\frac{1}{4}$ 时， $f(-1)=c-\frac{1}{4}>0$ ， $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}>0$ ， $f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}>0$ ， $f(1)=c+\frac{1}{4}>0$ ，

又 $f(-4c)=-64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)<0$ ，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-4c, -1)$ 上存在唯一一个零点 x_0 ，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-1, +\infty)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

当 $c<-\frac{1}{4}$ 时， $f(-1)=c-\frac{1}{4}<0$ ， $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}<0$ ， $f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}<0$ ， $f(1)=c+\frac{1}{4}<0$ ，

又 $f(-4c)=64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)>0$ ，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(1, -4c)$ 上存在唯一一个零点 x'_0 ，

即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-\infty, 1)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

综上， $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

[方法二]【最优解】:

设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，且 $|x_0| \leq 1$ ，则 $c = -x_0^3 + \frac{3}{4}x_0$.

从而 $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - x_0^3 + \frac{3}{4}x_0 = (x - x_0)\left(x^2 + x_0x + x_0^2 - \frac{3}{4}\right)$.

令 $h(x) = x^2 + x_0x + x_0^2 - \frac{3}{4}$ ，由判别式 $\Delta = x_0^2 - 4\left(x_0^2 - \frac{3}{4}\right) = 3 - 3x_0^2 \geq 0$ ，可知 $h(x) = 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有

解， $h(x)$ 的对称轴是 $x = -\frac{x_0}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ $\begin{cases} h(1) = 1 + x_0 + x_0^2 - \frac{3}{4} = \left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ h(-1) = 1 - x_0 + x_0^2 - \frac{3}{4} = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \end{cases}$ ，所以 $h(x)$ 在区

间 $\left[-1, -\frac{x_0}{2}\right]$ 上有一根为 x_1 ，在区间 $\left[-\frac{x_0}{2}, 1\right]$ 上有一根为 x_2 ，进而有 $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ ，所以 $f(x)$ 的所有零点的绝对值均不大于 1.

[方法三]:

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个绝对值不大于 1 的零点，且 $c = -x_0^3 + \frac{3}{4}x_0, |x_0| \leq 1$. 设 $c(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x$ ，则 $c'(x) = -3x^2 + \frac{3}{4}$ ，显然 $c(x)$ 在区间 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 内单调递减，在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 内单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内单调递减. 又 $c(-1) = \frac{1}{4}, c(1) = -\frac{1}{4}, c\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, c\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ，于是 $c(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

设 x_1 为函数 $f(x)$ 的零点，则必有 $f(x) = x_1^3 - \frac{3}{4}x_1 + c = 0$ ，于是 $-\frac{1}{4} \leq c = -x_1^3 + \frac{3}{4}x_1 \leq \frac{1}{4}$ ，所以

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 3x_1 - 1 = (x_1 - 1)(2x_1 + 1)^2 \leq 0, \\ 4x_1^3 - 3x_1 + 1 = (x_1 + 1)(2x_1 - 1)^2 \geq 0, \end{cases} \text{解得 } -1 \leq x_1 \leq 1, \text{ 即 } |x_1| \leq 1.$$

综上， $f(x)$ 的所有零点的绝对值都不大于 1.

[方法四]:

由 (1) 知， $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + c, f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{2}$. 则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 内递增，在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 内递减，在区间 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内递增，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = c + \frac{1}{4} = f(1)$ ， $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{4} = f(-1)$.

(i) 若 $f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ ，即 $c > \frac{1}{4}$ 或 $c < -\frac{1}{4}$ ， $f(x)$ 有唯一一个零点 x_0 ，显然有 $|x_0| > 1$ ，不

满足题意；

(ii) 若 $f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ ，即 $c=\frac{1}{4}$ 或 $c=-\frac{1}{4}$ ， $f(x)$ 有两个零点，不妨设一个零点为 $x_0=-\frac{1}{2}$ ，显然有 $|x_0|\leq 1$ ，此时， $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ ，则 $f(1)=0$ ，另一个零点为 1，满足题意；同理，若一个零点为 $x_0=\frac{1}{2}$ ，则另一个零点为 -1。

(iii) 若 $f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ ，即 $-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$ ， $f(x)$ 有三个零点，易知在区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 内有一个零点，不妨设为 x_0 ，显然有 $|x_0|\leq 1$ ，又 $f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$ ， $f(-1)<0$ ，所以在 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 内有一个零点 m ，显然 $|m|\leq 1$ ，同理， $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有一个零点 n ，有 $|n|\leq 1$ 。

综上， $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1。

[方法五]:

设 x_1 是 $f(x)$ 的一个零点且 $|x_1|\leq 1$ ，则 $c=-x_1^3+\frac{3}{4}x_1$ ， x_2 是 $f(x)$ 的另一个零点。

$$x_2^3-\frac{3}{4}x_2+c=x_2^3-\frac{3}{4}x_2-x_1^3+\frac{3}{4}x_1=(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-\frac{3}{4}\right)=0.$$

则 $x_2^2+x_1x_2+x_1^2-\frac{3}{4}=0$ ，设 $m(x)=x^2+x_1x+x_1^2-\frac{3}{4}$ ，由判别式 $\Delta=x_1^2-4\left(x_1^2-\frac{3}{4}\right)=3-3x_1^2\geq 0$ ，

所以方程有解。

假设实数 x_2 满足 $|x_2|>1$ 。

由 $|x_1|\leq 1, |x_2|>1, x_1^2+x_1x_2+x_2^2=x_2^2\left(\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_1}{x_2}+1\right)=x_2^2\left[\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$ ，得 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>\frac{3}{4}$ 。与

$x_2^2+x_1x_2+x_1^2-\frac{3}{4}=0$ 矛盾，假设不成立。

所以， $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1。

【整体点评】

(2) 方法一：先通过研究函数的单调性，得出零点可能所在区间，再根据反证法思想即可推出矛盾，是通性通法；方法二：利用零点的定义以及零点存在性定理即可求出，是本题的最优解；方法三：利用零点的定义结合题意求出 c 的范围，然后再由零点定义以及 c 的范围即可求出所有零点的范围，从而证出；方法四：由函数的单调性讨论极大值极小值的符号，得出 c 的范围，再结合零点存在性定理即可证出；方法五：设函数的一个零点为 x_1 ，满足

$|x_1|\leq 1$ ，再设另一个零点为 x_2 ，通过零点定义找到 x_1, x_2 的关系，再根据一元二次方程存在解

的条件以及反证法即可推出矛盾，从而证出.

12. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(1) 当 $a = e$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

(2) 若不等式 $f(x) \geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{2}{e-1}$ (2) $[1, +\infty)$

【解析】

【分析】

(1) 利用导数的几何意义求出在点 $(1, f(1))$ 切线方程，即可得到坐标轴交点坐标，最后根据三角形面积公式得结果；

(2) 方法一：利用导数研究函数 $f(x)$ 的单调性，当 $a=1$ 时，由 $f'(1)=0$ 得 $f(x)_{\min} = f(1)=1$ ，符合题意；当 $a>1$ 时，可证 $f'(\frac{1}{a})f'(1)<0$ ，从而 $f'(x)$ 存在零点 $x_0>0$ ，使得

$f'(x_0) = ae^{x_0-1} - \frac{1}{x_0} = 0$ ，得到 $f(x)_{\min}$ ，利用零点的条件，结合指数对数的运算化简后，利用基本不等式可以证得 $f(x) \geq 1$ 恒成立；当 $0 < a < 1$ 时，研究 $f(1)$ 即可得到不符合题意. 综合可得 a 的取值范围.

【详解】

(1) $\because f(x) = e^x - \ln x + 1$, $\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $\therefore k = f'(1) = e - 1$.

$\because f(1) = e + 1$, $\therefore$ 切点坐标为 $(1, 1+e)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - e - 1 = (e - 1)(x - 1)$, 即 $y = (e - 1)x + 2$,

$\therefore$ 切线与坐标轴交点坐标分别为 $(0, 2), (\frac{-2}{e-1}, 0)$,

$\therefore$ 所求三角形面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times |\frac{-2}{e-1}| = \frac{2}{e-1}$.

(2) [方法一]: 通性通法

$\because f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$, $\therefore f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$, 且 $a > 0$.

设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = ae^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a=1$ 时, $f'(1)=0, \therefore f(x)_{\min}=f(1)=1, \therefore f(x) \geq 1$ 成立.

当 $a>1$ 时, $\frac{1}{a}<1$, $\therefore e^{\frac{1}{a}-1}<1$, $\therefore f'(\frac{1}{a})f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$,

$\therefore$ 存在唯一 $x_0>0$, 使得 $f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时 $f'(x)<0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时

$f'(x)>0$, $\therefore ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$, $\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$,

因此 $f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a$

$$=\frac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a \geq 2\ln a-1+2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0}=2\ln a+1>1,$$

$\therefore f(x)>1, \therefore f(x) \geq 1$ 恒成立;

当 $0<a<1$ 时, $f(1)=a+\ln a<a<1, \therefore f(1)<1, f(x) \geq 1$ 不是恒成立.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

[方法二]【最优解】: 同构

由 $f(x) \geq 1$ 得 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a \geq 1$, 即 $e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1 \geq \ln x+x$, 而 $\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$, 所以 $e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1 \geq e^{\ln x}+\ln x$.

令 $h(m)=e^m+m$, 则 $h'(m)=e^m+1>0$, 所以 $h(m)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

由 $e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1 \geq e^{\ln x}+\ln x$, 可知 $h(\ln a+x-1) \geq h(\ln x)$, 所以 $\ln a+x-1 \geq \ln x$, 所以 $\ln a \geq (\ln x-x+1)_{\max}$.

令 $F(x)=\ln x-x+1$, 则 $F'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x)>0, F(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x)<0, F(x)$ 单调递减.

所以 $[F(x)]_{\max}=F(1)=0$, 则 $\ln a \geq 0$, 即 $a \geq 1$.

所以 a 的取值范围为 $a \geq 1$.

[方法三]: 换元同构

由题意知 $a>0, x>0$, 令 $ae^{x-1}=t$, 所以 $\ln a+x-1=\ln t$, 所以 $\ln a=\ln t-x+1$.

于是 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a=t-\ln x+\ln t-x+1$.

由于 $f(x) \geq 1, t-\ln x+\ln t-x+1 \geq 1 \Leftrightarrow t+\ln t \geq x+\ln x$, 而 $y=x+\ln x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时为增函数,

故 $t \geq x$, 即 $ae^{x-1} \geq x$, 分离参数后有 $a \geq \frac{x}{e^{x-1}}$.

令 $g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$ ，所以 $g'(x) = \frac{e^{x-1} - xe^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2x-2}}$ 。

当 $0 < x < 1$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增；当 $x > 1$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减。

所以当 $x=1$ 时， $g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$ 取得最大值为 $g(1)=1$ 。所以 $a \geq 1$ 。

[方法四]：

因为定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $f(x) \geq 1$ ，所以 $f(1) \geq 1$ ，即 $a + \ln a \geq 1$ 。

令 $S(a) = a + \ln a$ ，则 $S'(a) = 1 + \frac{1}{a} > 0$ ，所以 $S(a)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增。

因为 $S(1) = 1$ ，所以 $a \geq 1$ 时，有 $S(a) \geq S(1)$ ，即 $a + \ln a \geq 1$ 。

下面证明当 $a \geq 1$ 时， $f(x) \geq 1$ 恒成立。

令 $T(a) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ ，只需证当 $a \geq 1$ 时， $T(a) \geq 1$ 恒成立。

因为 $T'(a) = e^{x-1} + \frac{1}{a} > 0$ ，所以 $T(a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 内单调递增，则 $[T(a)]_{\min} = T(1) = e^{x-1} - \ln x$ 。

因此要证明 $a \geq 1$ 时， $T(a) \geq 1$ 恒成立，只需证明 $[T(a)]_{\min} = e^{x-1} - \ln x \geq 1$ 即可。

由 $e^x \geq x+1$ ， $\ln x \leq x-1$ ，得 $e^{x-1} \geq x$ ， $-\ln x \geq 1-x$ 。

上面两个不等式两边相加可得 $e^{x-1} - \ln x \geq 1$ ，故 $a \geq 1$ 时， $f(x) \geq 1$ 恒成立。

当 $0 < a < 1$ 时，因为 $f(1) = a + \ln a < 1$ ，显然不满足 $f(x) \geq 1$ 恒成立。

所以 a 的取值范围为 $a \geq 1$ 。

【整体点评】

(2) 方法一：利用导数判断函数 $f(x)$ 的单调性，求出其最小值，由 $f_{\min} \geq 0$ 即可求出，解法虽稍麻烦，但是此类题，也是本题的通性通法；

方法二：利用同构思想将原不等式化成 $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq e^{\ln x} + \ln x$ ，再根据函数

$h(m) = e^m + m$ 的单调性以及分离参数法即可求出，是本题的最优解；

方法三：通过先换元，令 $ae^{x-1} = t$ ，再同构，可将原不等式化成 $t + \ln t \geq x + \ln x$ ，再根据函数 $y = x + \ln x$ 的单调性以及分离参数法求出；

方法四：由特殊到一般，利用 $f(1) \geq 1$ 可得 a 的取值范围，再进行充分性证明即可。

13. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数。证明：

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点。

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 求得导函数后，可判断出导函数在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，根据零点存在定理可判断出 $\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，使得 $g'(x_0) = 0$ ，进而得到导函数在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性，从而可证得结论；(2) 由(1)的结论可知 $x = 0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的唯一零点；当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，首先可判断出在 $(0, x_0)$ 上无零点，再利用零点存在定理得到 $f(x)$ 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性，可知 $f(x) > 0$ ，不存在零点；当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，利用零点存在定理和 $f(x)$ 单调性可判断出存在唯一一个零点；当 $x \in (\pi, +\infty)$ ，可证得 $f(x) < 0$ ；综合上述情况可证得结论.

【详解】

(1) 由题意知： $f(x)$ 定义域为： $(-1, +\infty)$ 且 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$

$$\text{令 } g(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}, \quad x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\because \frac{1}{(x+1)^2} \text{ 在 } \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增, } -\sin x \text{ 在 } \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减}$$

$$\therefore g'(x) \text{ 在 } \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减}$$

$$\text{又 } g'(0) = -\sin 0 + 1 = 1 > 0, \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{4}{(\pi+2)^2} = \frac{4}{(\pi+2)^2} - 1 < 0$$

$$\therefore \exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } g'(x_0) = 0$$

$$\therefore \text{当 } x \in (-1, x_0) \text{ 时, } g'(x) > 0; \quad x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } g'(x) < 0$$

$$\text{即 } g(x) \text{ 在 } (-1, x_0) \text{ 上单调递增; 在 } \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减}$$

则 $x = x_0$ 为 $g(x)$ 唯一的极大值点

即： $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一的极大值点 x_0 .

(2) 由 (1) 知： $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$

① 当 $x \in (-1, 0]$ 时，由 (1) 可知 $f'(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递增

$\therefore f'(x) \leq f'(0) = 0$ $\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递减

又 $f(0) = 0$

$\therefore x = 0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的唯一零点

② 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

又 $f'(0) = 0$ $\therefore f'(x_0) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，此时 $f(x) > f(0) = 0$ ，不存在零点

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi+2} = -\frac{2}{\pi+2} < 0$

$\therefore \exists x_1 \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，使得 $f'(x_1) = 0$

$\therefore f(x)$ 在 (x_0, x_1) 上单调递增，在 $\left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

又 $f(x_0) > f(0) = 0$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{2e}{\pi+2} > \ln 1 = 0$

$\therefore f(x) > 0$ 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，此时不存在零点

③ 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时， $\sin x$ 单调递减， $-\ln(x+1)$ 单调递减

$\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ， $f(\pi) = \sin \pi - \ln(\pi+1) = -\ln(\pi+1) < 0$

即 $f(\pi) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ ，又 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减

$\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上存在唯一零点

④ 当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时， $\sin x \in [-1, 1]$ ， $\ln(x+1) > \ln(\pi+1) > \ln e = 1$

$$\therefore \sin x - \ln(x+1) < 0$$

即 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 上不存在零点

综上所述: $f(x)$ 有且仅有 2 个零点

【点睛】

本题考查导数与函数极值之间的关系、利用导数解决函数零点个数的问题. 解决零点问题的关键一方面是利用零点存在定理或最值点来说明存在零点, 另一方面是利用函数的单调性说明在区间内零点的唯一性, 二者缺一不可.

14. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.

【答案】(1) 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是单调增函数, 证明见解析;

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 对函数 $f(x)$ 求导, 结合定义域, 判断函数的单调性;

(2) 先求出曲线 $y = \ln x$ 在 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线 l , 然后求出当曲线 $y = e^x$ 切线的斜率与 l 斜率相等时, 证明曲线 $y = e^x$ 切线 l' 在纵轴上的截距与 l 在纵轴的截距相等即可.

【详解】

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$,

$$f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}, \text{ 因为函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } (0, 1) \cup (1, +\infty), \text{ 所以 } f'(x) > 0,$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是单调增函数;

$$\text{当 } x \in (0, 1), \text{ 时, } x \rightarrow 0, y \rightarrow -\infty, \text{ 而 } f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} - \frac{\frac{1}{e}+1}{\frac{1}{e}-1} = \frac{2}{e-1} > 0, \text{ 显然当 } x \in (0, 1), \text{ 函数 } f(x)$$

有零点, 而函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调递增, 故当 $x \in (0, 1)$ 时, 函数 $f(x)$ 有唯一的零点;

$$\text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } f(e) = \ln e - \frac{e+1}{e-1} = \frac{-2}{e-1} < 0, f(e^2) = \ln e^2 - \frac{e^2+1}{e^2-1} = \frac{e^2-3}{e^2-1} > 0,$$

因为 $f(e) \cdot f(e^2) < 0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 (e, e^2) 必有一零点，而函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调递增，故当 $x \in (1, +\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一的零点

综上所述，函数 $f(x)$ 的定义域 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 内有 2 个零点；

(2) 因为 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，所以 $f(x_0) = \ln x_0 - \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} = 0 \Rightarrow \ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$ ，所以曲线 $y = \ln x$ 在 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线 l 的斜率 $k = \frac{1}{x_0}$ ，故曲线 $y = \ln x$ 在

$A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线 l 的方程为： $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ 而 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ ，所以 l 的方程为

$y = \frac{x}{x_0} + \frac{2}{x_0 - 1}$ ，它在纵轴的截距为 $\frac{2}{x_0 - 1}$ 。

设曲线 $y = e^x$ 的切点为 $B(x_1, e^{x_1})$ ，过切点为 $B(x_1, e^{x_1})$ 切线 l' ， $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$ ，所以在 $B(x_1, e^{x_1})$

处的切线 l' 的斜率为 e^{x_1} ，因此切线 l' 的方程为 $y = e^{x_1}x + e^{x_1}(1 - x_1)$ ，

当切线 l' 的斜率 $k_1 = e^{x_1}$ 等于直线 l 的斜率 $k = \frac{1}{x_0}$ 时，即 $e^{x_1} = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_1 = -(\ln x_0)$ ，

切线 l' 在纵轴的截距为 $b_1 = e^{x_1}(1 - x_1) = e^{-\ln x_0}(1 + \ln x_0) = \frac{1}{x_0}(1 + \ln x_0)$ ，而 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ ，所以

$b_1 = \frac{1}{x_0}(1 + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}) = \frac{2}{x_0 - 1}$ ，直线 l, l' 的斜率相等，在纵轴上的截距也相等，因此直线 l, l' 重合，

故曲线 $y = \ln x$ 在 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线。

【点睛】

本题考查了利用导数求已知函数的单调性、考查了曲线的切线方程，考查了数学运算能力。

15. 【2019 年新课标 3 卷理科】已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 是否存在 a, b ，使得 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1 ？若存在，求出 a, b 的所有值；若不存在，说明理由。

【答案】(1) 见详解；(2) $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ 。

【解析】

【分析】

(1) 先求 $f(x)$ 的导数，再根据 a 的范围分情况讨论函数单调性；(2) 根据 a 的各种范围，利用函数单调性进行最大值和最小值的判断，最终得出 a, b 的值。

【详解】

(1)对 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$ 求导得 $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x(x - \frac{a}{3})$. 所以有

当 $a < 0$ 时, $(-\infty, \frac{a}{3})$ 区间上单调递增, $(\frac{a}{3}, 0)$ 区间上单调递减, $(0, +\infty)$ 区间上单调递增;

当 $a = 0$ 时, $(-\infty, +\infty)$ 区间上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $(-\infty, 0)$ 区间上单调递增, $(0, \frac{a}{3})$ 区间上单调递减, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 区间上单调递增.

(2)若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 有最大值 1 和最小值 -1, 所以

若 $a < 0$, $(-\infty, \frac{a}{3})$ 区间上单调递增, $(\frac{a}{3}, 0)$ 区间上单调递减, $(0, +\infty)$ 区间上单调递增;

此时在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ 代入解得 $b = -1$, $a = 0$, 与 $a < 0$ 矛盾, 所以 $a < 0$ 不成立.

若 $a = 0$, $(-\infty, +\infty)$ 区间上单调递增; 在区间 $[0, 1]$ 所以 $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ 代入解得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$.

若 $0 < a \leq 2$, $(-\infty, 0)$ 区间上单调递增, $(0, \frac{a}{3})$ 区间上单调递减, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 区间上单调递增.

即 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 单调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 单调递增, 所以区间 $[0, 1]$ 上最小值为 $f(\frac{a}{3})$

而 $f(0) = b$, $f(1) = 2 - a + b \geq f(0)$, 故所以区间 $[0, 1]$ 上最大值为 $f(1)$.

即 $\begin{cases} 2(\frac{a}{3})^3 - a(\frac{a}{3})^2 + b = -1 \\ 2 - a + b = 1 \end{cases}$ 相减得 $2 - a + \frac{a^3}{27} = 2$, 即 $a(a - 3\sqrt{3})(a + 3\sqrt{3}) = 0$, 又因为 $0 < a \leq 2$,

所以无解.

若 $2 < a \leq 3$, $(-\infty, 0)$ 区间上单调递增, $(0, \frac{a}{3})$ 区间上单调递减, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 区间上单调递增.

即 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 单调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 单调递增, 所以区间 $[0, 1]$ 上最小值为 $f(\frac{a}{3})$

而 $f(0) = b$, $f(1) = 2 - a + b \leq f(0)$, 故所以区间 $[0, 1]$ 上最大值为 $f(0)$.

即 $\begin{cases} 2(\frac{a}{3})^3 - a(\frac{a}{3})^2 + b = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ 相减得 $\frac{a^3}{27} = 2$, 解得 $x = 3\sqrt[3]{2}$, 又因为 $2 < a \leq 3$, 所以无解.

若 $a > 3$, $(-\infty, 0)$ 区间上单调递增, $(0, \frac{a}{3})$ 区间上单调递减, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 区间上单调递增.

所以有 $f(x)$ 区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 所以区间 $[0, 1]$ 上最大值为 $f(0)$, 最小值为 $f(1)$

即 $\begin{cases} b = 1 \\ 2 - a + b = -1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$.

综上得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$.

【点睛】

这是一道常规的函数导数不等式和综合题，题目难度比往年降低了不少。考查的函数单调性，最大值最小值这种基本概念的计算。思考量不大，由计算量补充。

16. 【2018 年新课标 1 卷理科】已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ，证明：
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2.$$

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【详解】

分析：(1) 首先确定函数的定义域，之后对函数求导，之后对 a 进行分类讨论，从而确定出导数在相应区间上的符号，从而求得函数对应的单调区间；

(2) 根据 $f(x)$ 存在两个极值点，结合第一问的结论，可以确定 $a > 2$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得到两个极值点 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个不等的正实根，利用韦达定理将其转换，构造新函数证得结果。

详解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}.$$

(i) 若 $a \leq 2$ ，则 $f'(x) \leq 0$ ，当且仅当 $a = 2$ ， $x = 1$ 时 $f'(x) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减。

(ii) 若 $a > 2$ ，令 $f'(x) = 0$ 得， $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 。

当 $x \in \left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 时， $f'(x) < 0$ ；

当 $x \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 时， $f'(x) > 0$ 。所以 $f(x)$ 在

$\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right), \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 单调递增。

(2) 由 (1) 知， $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$ 。

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2 - ax + 1 = 0$ ，所以 $x_1 x_2 = 1$ ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，则 $x_2 > 1$ 。由

于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = -\frac{1}{x_1x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2},$$

所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < a-2$ 等价于 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0$.

设函数 $g(x) = \frac{1}{x} - x + 2\ln x$, 由(1)知, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 又 $g(1) = 0$, 从而当 $x \in (1, +\infty)$

时, $g(x) < 0$.

所以 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0$, 即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < a-2$.

点睛: 该题考查的是应用导数研究函数的问题, 涉及到的知识点有应用导数研究函数的单调性、应用导数研究函数的极值以及极值所满足的条件, 在解题的过程中, 需要明确导数的符号对单调性的决定性作用, 再者就是要先保证函数的生存权, 先确定函数的定义域, 要对参数进行讨论, 还有就是在做题的时候, 要时刻关注第一问对第二问的影响, 再者就是通过构造新函数来解决问题的思路要明确.

17. 【2018 年新课标 2 卷理科】已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a 的值.

【答案】(1) 见解析; (2) $a = \frac{e^2}{4}$

【解析】

【详解】

分析: (1) 先构造函数 $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - 1$, 再求导函数, 根据导函数不大于零得函数单调递减, 最后根据单调性证得不等式; (2) 研究 $f(x)$ 零点, 等价研究 $h(x) = 1 - ax^2e^{-x}$ 的零点, 先求 $h(x)$ 导数: $h'(x) = ax(x-2)e^{-x}$, 这里产生两个讨论点, 一个是 a 与零, 一个是 x 与 2, 当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, $h(x)$ 没有零点; 当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 先减后增, 从而确定只有一个零点的必要条件, 再利用零点存在定理确定条件的充分性, 即得 a 的值.

详解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) \geq 1$ 等价于 $(x^2 + 1)e^{-x} - 1 \leq 0$.

设函数 $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - 1$ ，则 $g'(x) = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}$ 。

当 $x \neq 1$ 时， $g'(x) < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减。

而 $g(0) = 0$ ，故当 $x \geq 0$ 时， $g(x) \leq 0$ ，即 $f(x) \geq 1$ 。

(2) 设函数 $h(x) = 1 - ax^2 e^{-x}$ 。

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点。

(i) 当 $a \leq 0$ 时， $h(x) > 0$ ， $h(x)$ 没有零点；

(ii) 当 $a > 0$ 时， $h'(x) = ax(x-2)e^{-x}$ 。

当 $x \in (0, 2)$ 时， $h'(x) < 0$ ；当 $x \in (2, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ 。

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减，在 $(2, +\infty)$ 单调递增。

故 $h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的最小值。

① 若 $h(2) > 0$ ，即 $a < \frac{e^2}{4}$ ， $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点；

② 若 $h(2) = 0$ ，即 $a = \frac{e^2}{4}$ ， $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点；

③ 若 $h(2) < 0$ ，即 $a > \frac{e^2}{4}$ ，由于 $h(0) = 1$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 有一个零点，

由 (1) 知，当 $x > 0$ 时， $e^x > x^2$ ，所以 $h(4a) = 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0$ 。

故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 有一个零点，因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点。

综上， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时， $a = \frac{e^2}{4}$ 。

点睛：利用函数零点的情况求参数值或取值范围的方法

(1) 利用零点存在的判定定理构建不等式求解。

(2) 分离参数后转化为函数的值域(最值)问题求解。

(3) 转化为两熟悉的函数图象的上、下关系问题，从而构建不等式求解。

18. 【2018 年新课标 3 卷理科】已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2) \ln(1+x) - 2x$ 。

(1) 若 $a = 0$ ，证明：当 $-1 < x < 0$ 时， $f(x) < 0$ ；当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ；

(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 。

【答案】(1) 见解析

$$(2) a = -\frac{1}{6}$$

【解析】

【详解】

分析：(1) 求导，利用函数单调性证明即可。

(2) 分类讨论 $a \geq 0$ 和 $a < 0$ ，构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{2+x+ax^2}$ ，讨论 $h(x)$ 的性质即可得到 a 的范围。

详解：(1) 当 $a = 0$ 时， $f(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x$ ， $f'(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ 。

设函数 $g(x) = f'(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ ，则 $g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ 。

当 $-1 < x < 0$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x > 0$ 时， $g'(x) > 0$ 。故当 $x > -1$ 时， $g(x) \geq g(0) = 0$ ，且仅当 $x = 0$ 时， $g(x) = 0$ ，从而 $f'(x) \geq 0$ ，且仅当 $x = 0$ 时， $f'(x) = 0$ 。

所以 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增。

又 $f(0) = 0$ ，故当 $-1 < x < 0$ 时， $f(x) < 0$ ；当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ 。

(2) (i) 若 $a \geq 0$ ，由 (1) 知，当 $x > 0$ 时， $f(x) \geq (2+x)\ln(1+x) - 2x > 0 = f(0)$ ，这与 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾。

(ii) 若 $a < 0$ ，设函数 $h(x) = \frac{f(x)}{2+x+ax^2} = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x+ax^2}$ 。

由于当 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时， $2+x+ax^2 > 0$ ，故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同。

又 $h(0) = f(0) = 0$ ，故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点当且仅当 $x = 0$ 是 $h(x)$ 的极大值点。

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(2+x+ax^2) - 2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2} = \frac{x^2(a^2x^2 + 4ax + 6a + 1)}{(x+1)(ax^2 + x + 2)^2}。$$

如果 $6a+1 > 0$ ，则当 $0 < x < -\frac{6a+1}{4a}$ ，且 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时， $h'(x) > 0$ ，故 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点。

如果 $6a+1 < 0$ ，则 $a^2x^2 + 4ax + 6a + 1 = 0$ 存在根 $x_1 < 0$ ，故当 $x \in (x_1, 0)$ ，且 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时，

$h'(x) < 0$ ，所以 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点.

如果 $6a+1=0$ ，则 $h'(x) = \frac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$. 则当 $x \in (-1, 0)$ 时， $h'(x) > 0$ ；当 $x \in (0, 1)$ 时，

$h'(x) < 0$. 所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

综上， $a = -\frac{1}{6}$.

点睛：本题考查函数与导数的综合应用，利用函数的单调性求出最值证明不等式，第二问分

类讨论 $a \geq 0$ 和 $a < 0$ ，当 $a < 0$ 时构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{2+x+ax^2}$ 时关键，讨论函数 $h(x)$ 的性质，
本题难度较大.

