

## 专题 04 导数及其应用（解答题）（理科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$ .

(1) 若  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围;

(2) 证明: 若  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 则  $x_1 x_2 < 1$ .

2. 【2022 年全国乙卷】已知函数  $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$

(1) 当  $a = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $(-1, 0), (0, +\infty)$  各恰有一个零点, 求  $a$  的取值范围.

3. 【2022 年新高考 1 卷】已知函数  $f(x) = e^x - ax$  和  $g(x) = ax - \ln x$  有相同的最小值.

(1) 求  $a$ ;

(2) 证明: 存在直线  $y = b$ , 其与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

4. 【2022 年新高考 2 卷】已知函数  $f(x) = xe^{ax} - e^x$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $x > 0$  时,  $f(x) < -1$ , 求  $a$  的取值范围;

(3) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 证明:  $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$ .

5. 【2021 年甲卷理科】已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 函数  $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = 1$  有且仅有两个交点, 求  $a$  的取值范围.

6. 【2021 年乙卷理科】设函数  $f(x) = \ln(a-x)$ , 已知  $x = 0$  是函数  $y = xf(x)$  的极值点.

(1) 求  $a$ ;

(2) 设函数  $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$ . 证明:  $g(x) < 1$ .

7. 【2021 年新高考 1 卷】已知函数  $f(x) = x(1 - \ln x)$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 设  $a, b$  为两个不相等的正数, 且  $b \ln a - a \ln b = a - b$ , 证明:  $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ .

8. 【2021 年新高考 2 卷】已知函数  $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 从下面两个条件中选一个, 证明:  $f(x)$  只有一个零点

①  $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$ ;

②  $0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a$ .

9. 【2020 年新课标 1 卷理科】已知函数  $f(x) = e^x + ax^2 - x$ .

(1) 当  $a=1$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ , 求  $a$  的取值范围.

10. 【2020 年新课标 2 卷理科】已知函数  $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  的单调性;

(2) 证明:  $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ;

(3) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 证明:  $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \dots \sin^2 2nx \leq \frac{3^n}{4^n}$ .

11. 【2020 年新课标 3 卷理科】设函数  $f(x) = x^3 + bx + c$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$  处的切线与  $y$  轴垂直.

(1) 求  $b$ .

(2) 若  $f(x)$  有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明:  $f(x)$  所有零点的绝对值都不大于 1.

12. 【2020 年新高考 1 卷 (山东卷)】已知函数  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ .

(1) 当  $a=e$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若不等式  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

13. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知函数  $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数. 证明:

(1)  $f'(x)$  在区间  $(-1, \frac{\pi}{2})$  存在唯一极大值点;

(2)  $f(x)$  有且仅有 2 个零点.

14. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性, 并证明  $f(x)$  有且仅有两个零点;

(2) 设  $x_0$  是  $f(x)$  的一个零点, 证明曲线  $y = \ln x$  在点  $A(x_0, \ln x_0)$  处的切线也是曲线  $y = e^x$  的切线.

15. 【2019 年新课标 3 卷理科】已知函数  $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$ .

---

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 是否存在  $a, b$ , 使得  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  的最小值为  $-1$  且最大值为  $1$ ? 若存在, 求出  $a, b$  的所有值; 若不存在, 说明理由.

16. 【2018 年新课标 1 卷理科】已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 证明:  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ .

17. 【2018 年新课标 2 卷理科】已知函数  $f(x) = e^x - ax^2$ .

(1) 若  $a = 1$ , 证明: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq 1$ ;

(2) 若  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  只有一个零点, 求  $a$  的值.

18. 【2018 年新课标 3 卷理科】已知函数  $f(x) = (2 + x + ax^2) \ln(1 + x) - 2x$ .

(1) 若  $a = 0$ , 证明: 当  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ;

(2) 若  $x = 0$  是  $f(x)$  的极大值点, 求  $a$ .

