

专题 04 导数及其应用（解答题）（文科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】已知函数 $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

(1) 若 $x_1 = -1$, 求 a ;

(2) 求 a 的取值范围.

2. 【2022 年全国乙卷】已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

3. 【2021 年甲卷文科】设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

4. 【2021 年乙卷文科】已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

5. 【2020 年新课标 1 卷文科】已知函数 $f(x) = e^x - a(x+2)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

6. 【2020 年新课标 2 卷文科】已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 2x + c$, 求 c 的取值范围;

(2) 设 $a > 0$ 时, 讨论函数 $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 的单调性.

7. 【2020 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = x^3 - kx + k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

8. 【2019 年新课标 2 卷文科】已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

9. 【2019 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M - m$ 的取值范围.

10. 【2018 年新课标 1 卷文科】【2018 年新课标 I 卷文】已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

11. 【2018 年新课标 2 卷文科】已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

(1) 若 $a = 3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

12. 【2018 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

