

专题 04 导数及其应用（解答题）（文科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】已知函数 $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

(1) 若 $x_1 = -1$, 求 a ;

(2) 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 3

(2) $[-1, +\infty)$

【解析】

【分析】

(1) 先由 $f(x)$ 上的切点求出切线方程, 设出 $g(x)$ 上的切点坐标, 由斜率求出切点坐标, 再由函数值求出 a 即可;

(2) 设出 $g(x)$ 上的切点坐标, 分别由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 及切点表示出切线方程, 由切线重合表示出 a , 构造函数, 求导求出函数值域, 即可求得 a 的取值范围.

(1)

由题意知, $f(-1) = -1 - (-1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(-1) = 3 - 1 = 2$, 则 $y = f(x)$ 在点 $(-1, 0)$ 处的切线方程为 $y = 2(x + 1)$,

即 $y = 2x + 2$, 设该切线与 $g(x)$ 切于点 $(x_2, g(x_2))$, $g'(x) = 2x$, 则 $g'(x_2) = 2x_2 = 2$, 解得 $x_2 = 1$, 则 $g(1) = 1 + a = 2 + 2$, 解得 $a = 3$;

(2)

$f'(x) = 3x^2 - 1$, 则 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y - (x_1^3 - x_1) = (3x_1^2 - 1)(x - x_1)$, 整理得 $y = (3x_1^2 - 1)x - 2x_1^3$,

设该切线与 $g(x)$ 切于点 $(x_2, g(x_2))$, $g'(x) = 2x$, 则 $g'(x_2) = 2x_2$, 则切线方程为 $y - (x_2^2 + a) = 2x_2(x - x_2)$, 整理得 $y = 2x_2x - x_2^2 + a$,

则 $\begin{cases} 3x_1^2 - 1 = 2x_2 \\ -2x_1^3 = -x_2^2 + a \end{cases}$, 整理得 $a = x_2^2 - 2x_1^3 = \left(\frac{3x_1^2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - 2x_1^3 = \frac{9}{4}x_1^4 - 2x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}$,

令 $h(x) = \frac{9}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$, 则 $h'(x) = 9x^3 - 6x^2 - 3x = 3x(3x + 1)(x - 1)$, 令 $h'(x) > 0$,

解得 $-\frac{1}{3} < x < 0$ 或 $x > 1$,

令 $h'(x) < 0$, 解得 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $0 < x < 1$, 则 x 变化时, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$\frac{5}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

则 $h(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$ ，故 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$ 。

2. 【2022 年全国乙卷】已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$ 。

(1)当 $a = 0$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

(2)若 $f(x)$ 恰有一个零点，求 a 的取值范围。

【答案】(1)-1

(2) $(0, +\infty)$

【解析】

【分析】

(1) 由导数确定函数的单调性，即可得解；

(2) 求导得 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$ ，按照 $a \leq 0$ 、 $0 < a < 1$ 及 $a > 1$ 结合导数讨论函数的单调性，

求得函数的极值，即可得解。

(1)

当 $a = 0$ 时， $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x, x > 0$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -1$ ；

(2)

$f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x, x > 0$ ，则 $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$ ，

当 $a \leq 0$ 时， $ax - 1 \leq 0$ ，所以当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = a - 1 < 0$ ，此时函数无零点，不合题意；

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 在 $(0, 1), (\frac{1}{a}, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

在 $(1, \frac{1}{a})$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

又 $f(1) = a - 1 < 0$, 当 x 趋近正无穷大时, $f(x)$ 趋近于正无穷大,

所以 $f(x)$ 仅在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 有唯一零点, 符合题意;

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 又 $f(1) = a - 1 = 0$,

所以 $f(x)$ 有唯一零点, 符合题意;

当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 在 $(0, \frac{1}{a}), (1, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 此时 $f(1) = a - 1 > 0$,

又 $f(\frac{1}{a^n}) = \frac{1}{a^{n-1}} - a^n + n(a+1)\ln a$, 当 n 趋近正无穷大时, $f(\frac{1}{a^n})$ 趋近负无穷,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 有一个零点, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 无零点,

所以 $f(x)$ 有唯一零点, 符合题意;

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

【点睛】

关键点点睛: 解决本题的关键是利用导数研究函数的极值与单调性, 把函数零点问题转化为函数的单调性与极值的问题.

3. 【2021 年甲卷文科】设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 的减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$; (2) $a > \frac{1}{e}$.

【解析】

【分析】

(1) 求出函数的导数, 讨论其符号后可得函数的单调性.

(2) 根据 $f(1) > 0$ 及 (1) 的单调性可得 $f(x)_{\min} > 0$, 从而可求 a 的取值范围.

【详解】

(1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{又 } f'(x) = \frac{(2ax+3)(ax-1)}{x},$$

因为 $a > 0, x > 0$, 故 $2ax+3 > 0$,

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$;

所以 $f(x)$ 的减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, 增区间为 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$.

(2) 因为 $f(1) = a^2 + a + 1 > 0$ 且 $y = f(x)$ 的图与 x 轴没有公共点,

所以 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴的上方,

由 (1) 中函数的单调性可得 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = 3 - 3\ln \frac{1}{a} = 3 + 3\ln a$,

故 $3 + 3\ln a > 0$ 即 $a > \frac{1}{e}$.

【点睛】

方法点睛: 不等式的恒成立问题, 往往可转化为函数的最值的符号来讨论, 也可以参变分离后转化不含参数的函数的最值问题, 转化中注意等价转化.

4. 【2021 年乙卷文科】已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

【答案】(1) 答案见解析; (2) $(1, a+1)$ 和 $(-1, -1-a)$.

【解析】

【分析】

(1) 首先求得导函数的解析式, 然后分类讨论导函数的符号即可确定原函数的单调性;

(2) 首先求得导数过坐标原点的切线方程, 然后将原问题转化为方程求解的问题, 据此即可求得公共点坐标.

【详解】

(1) 由函数的解析式可得: $f'(x) = 3x^2 - 2x + a$,

导函数的判别式 $\Delta = 4 - 12a$,

当 $\Delta = 4 - 12a \leq 0, a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) \geq 0, f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

当 $\Delta = 4 - 12a > 0, a < \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) = 0$ 的解为: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3}$,

当 $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

综上所述: 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right), \left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}, +\infty\right)$ 上

单调递增, 在 $\left[\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right]$ 上单调递减.

(2)由题意可得: $f(x_0) = x_0^3 - x_0^2 + ax_0 + 1$, $f'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + a$,

则切线方程为: $y - (x_0^3 - x_0^2 + ax_0 + 1) = (3x_0^2 - 2x_0 + a)(x - x_0)$,

切线过坐标原点, 则: $0 - (x_0^3 - x_0^2 + ax_0 + 1) = (3x_0^2 - 2x_0 + a)(0 - x_0)$,

整理可得: $2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0$, 即: $(x_0 - 1)(2x_0^2 + x_0 + 1) = 0$,

解得: $x_0 = 1$, 则 $f(x_0) = f(1) = 1 - 1 + a + 1 = a + 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 1 + a$

切线方程为: $y = (a + 1)x$,

与 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ 联立得 $x^3 - x^2 + ax + 1 = (a + 1)x$,

化简得 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, 由于切点的横坐标 1 必然是该方程的一个根, $\therefore (x - 1)$ 是

$x^3 - x^2 - x + 1$ 的一个因式, $\therefore$ 该方程可以分解因式为 $(x - 1)(x^2 - 1) = 0$,

解得 $x_1 = 1, x_2 = -1$,

$f(-1) = -1 - a$,

综上, 曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标为 $(1, a + 1)$ 和

$(-1, -1 - a)$.

【点睛】

本题考查利用导数研究含有参数的函数的单调性问题,和过曲线外一点所做曲线的切线问题,注意单调性研究中对导函数,要依据其零点的不同情况进行分类讨论;再求切线与函数曲线的公共点坐标时,要注意除了已经求出的切点,还可能有另外的公共点(交点),要通过联立方程求解,其中得到三次方程求解时要注意其中有一个实数根是求出的切点的横坐标,这样就容易通过分解因式求另一个根.三次方程时高考压轴题中的常见问题,不必恐惧,一般都能容易找到其中一个根,然后在通过分解因式的方法求其余的根.

5. 【2020 年新课标 1 卷文科】已知函数 $f(x) = e^x - a(x+2)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0)$, 增区间为 $(0, +\infty)$; (2) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

【解析】

【分析】

(1) 将 $a=1$ 代入函数解析式, 对函数求导, 分别令导数大于零和小于零, 求得函数的单调增区间和减区间;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 即 $e^x - a(x+2) = 0$ 有两个解, 将其转化为 $a = \frac{e^x}{x+2}$ 有两个解, 令

$h(x) = \frac{e^x}{x+2} (x \neq -2)$, 求导研究函数图象的走向, 从而求得结果.

【详解】

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x - (x+2)$, $f'(x) = e^x - 1$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$,

所以 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0)$, 增区间为 $(0, +\infty)$;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 即 $e^x - a(x+2) = 0$ 有两个解,

从方程可知, $x = -2$ 不成立, 即 $a = \frac{e^x}{x+2}$ 有两个解,

令 $h(x) = \frac{e^x}{x+2} (x \neq -2)$, 则有 $h'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$,

令 $h'(x) > 0$, 解得 $x > -1$, 令 $h'(x) < 0$, 解得 $x < -2$ 或 $-2 < x < -1$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(-2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

且当 $x < -2$ 时, $h(x) < 0$,

而 $x \rightarrow -2^+$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

所以当 $a = \frac{e^x}{x+2}$ 有两个解时, 有 $a > h(-1) = \frac{1}{e}$,

所以满足条件的 a 的取值范围是: $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

【点睛】

本题考查的是有关应用导数研究函数的问题, 涉及到的知识点有应用导数研究函数的单调性, 根据零点个数求参数的取值范围, 在解题的过程中, 也可以利用数形结合, 将问题转化为曲线 $y = e^x$ 和直线 $y = a(x+2)$ 有两个交点, 利用过点 $(-2, 0)$ 的曲线 $y = e^x$ 的切线斜率, 结合图形求得结果.

6. 【2020 年新课标 2 卷文科】已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 2x + c$, 求 c 的取值范围;

(2) 设 $a > 0$ 时, 讨论函数 $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 的单调性.

【答案】(1) $[-1, +\infty)$; (2) $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 没有递增区间

【解析】

【分析】

(1) [方法三] 不等式 $f(x) \leq 2x + c$ 转化为 $f(x) - 2x - c \leq 0$, 构造新函数, 利用导数求出新函数的最大值, 进而进行求解即可;

(2) 对函数 $g(x)$ 求导, 把导函数 $g'(x)$ 的分子构成一个新函数 $m(x)$, 再求导得到 $m'(x)$, 根据 $m'(x)$ 的正负, 判断 $m(x)$ 的单调性, 进而确定 $g'(x)$ 的正负性, 最后求出函数 $g(x)$ 的单调性.

【详解】

(1)

[方法一] 【最优解】:

$f(x) \leq 2x + c$ 等价于 $2\ln x - 2x \leq c - 1$.

设 $h(x) = 2\ln x - 2x$, 则 $h'(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2(1-x)}{x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内单调递增;

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递减.

故 $[h(x)]_{\max} = h(1) = -2$, 所以 $c - 1 \geq -2$, 即 $c \geq -1$, 所以 c 的取值范围是 $[-1, +\infty)$.

[方法二]: 切线放缩

若 $f(x) \leq 2x + c$, 即 $2\ln x + 1 \leq 2x + c$, 即 $\ln x \leq x + \frac{c-1}{2}$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立,

而 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线为 $y = x - 1$, 从而有 $\ln x \leq x - 1$,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立, 即 $\frac{c-1}{2} \geq -1$, 则 $c \geq -1$. 所以 c 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

[方法三]: 利用最值求取值范围

函数 $f(x)$ 的定义域为: $(0, +\infty)$

$f(x) \leq 2x + c \Rightarrow f(x) - 2x - c \leq 0 \Rightarrow 2\ln x + 1 - 2x - c \leq 0(*)$,

设 $h(x) = 2\ln x + 1 - 2x - c (x > 0)$, 则有 $h'(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2(1-x)}{x}$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增,

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $h(x)$ 有最大值,

即 $h(x)_{\max} = h(1) = 2\ln 1 + 1 - 2 \times 1 - c = -1 - c$,

要想不等式 $(*)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

只需 $h(x)_{\max} \leq 0 \Rightarrow -1 - c \leq 0 \Rightarrow c \geq -1$;

所以 c 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

$$(2) \quad g(x) = \frac{2\ln x + 1 - (2\ln a + 1)}{x - a} = \frac{2(\ln x - \ln a)}{x - a} (x > 0 \text{ 且 } x \neq a)$$

因此 $g'(x) = \frac{2(x - a - x \ln x + x \ln a)}{x(x - a)^2}$, 设 $m(x) = 2(x - a - x \ln x + x \ln a)$,

则有 $m'(x) = 2(\ln a - \ln x)$,

当 $x > a$ 时, $\ln x > \ln a$, 所以 $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减, 因此有 $m(x) < m(a) = 0$, 即

$g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减;

当 $0 < x < a$ 时, $\ln x < \ln a$, 所以 $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增, 因此有 $m(x) < m(a) = 0$, 即

$g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 没有递增区间.

【整体点评】

(1)方法一: 分类参数之后构造函数是处理恒成立问题的最常用方法, 它体现了等价转化的数学思想, 同时是的导数的工具也得到了充分利用;

方法二：切线放缩体现了解题的灵活性，将数形结合的思想应用到了解题过程之中，掌握常用的不等式是使用切线放缩的基础.

方法二：利用最值确定参数取值范围也是一种常用的方法，体现了等价转化的数学思想.

7. 【2020 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = x^3 - kx + k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点，求 k 的取值范围.

【答案】(1) 详见解析; (2) $(0, \frac{4}{27})$.

【解析】

【分析】

(1) $f'(x) = 3x^2 - k$ ，对 k 分 $k \leq 0$ 和 $k > 0$ 两种情况讨论即可;

(2) $f(x)$ 有三个零点，由 (1) 知 $k > 0$ ，且 $\begin{cases} f(-\sqrt{\frac{k}{3}}) > 0 \\ f(\sqrt{\frac{k}{3}}) < 0 \end{cases}$ ，解不等式组得到 k 的范围，再利用

零点存在性定理加以说明即可.

【详解】

(1) 由题， $f'(x) = 3x^2 - k$ ，

当 $k \leq 0$ 时， $f'(x) \geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

当 $k > 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = \pm\sqrt{\frac{k}{3}}$ ，令 $f'(x) < 0$ ，得 $-\sqrt{\frac{k}{3}} < x < \sqrt{\frac{k}{3}}$ ，

令 $f'(x) > 0$ ，得 $x < -\sqrt{\frac{k}{3}}$ 或 $x > \sqrt{\frac{k}{3}}$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{\frac{k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}})$ 上单调递减，在

$(-\infty, -\sqrt{\frac{k}{3}})$ ， $(\sqrt{\frac{k}{3}}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知， $f(x)$ 有三个零点，则 $k > 0$ ，且 $\begin{cases} f(-\sqrt{\frac{k}{3}}) > 0 \\ f(\sqrt{\frac{k}{3}}) < 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} k^2 + \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}} > 0 \\ k^2 - \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}} < 0 \end{cases}$ ，解得 $0 < k < \frac{4}{27}$ ，

当 $0 < k < \frac{4}{27}$ 时, $\sqrt{k} > \sqrt{\frac{k}{3}}$, 且 $f(\sqrt{k}) = k^2 > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{k}{3}}, \sqrt{k})$ 上有唯一一个零点,

同理 $-k-1 < -\sqrt{\frac{k}{3}}$, $f(-k-1) = -k^3 - (k+1)^2 < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-k-1, -\sqrt{\frac{k}{3}})$ 上有唯一一个零点,

又 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{\frac{k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}})$ 上有唯一一个零点, 所以 $f(x)$ 有三个零点,

综上所述 k 的取值范围为 $(0, \frac{4}{27})$.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数的单调性以及已知零点个数求参数的范围问题, 考查学生逻辑推理能力、数学运算能力, 是一道中档题.

8. 【2019 年新课标 2 卷文科】已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

【答案】(1) 见详解; (2) 见详解

【解析】

【分析】

(1) 先对函数 $f(x)$ 求导, 根据导函数的单调性, 得到存在唯一 x_0 , 使得 $f'(x_0)=0$, 进而可得判断函数 $f(x)$ 的单调性, 即可确定其极值点个数, 证明出结论成立;

(2) 先由 (1) 的结果, 得到 $f(x_0) < f(1) = -2 < 0$, $f(e^2) = e^2 - 3 > 0$, 得到 $f(x)=0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内存在唯一实根, 记作 $x=\alpha$, 再求出 $f(\frac{1}{\alpha})=0$, 即可结合题意, 说明结论成立.

【详解】

(1) 由题意可得, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$,

得 $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} - 1 = \ln x - \frac{1}{x}$,

显然 $f'(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 单调递增;

又 $f'(1) = -1 < 0$, $f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 4 - 1}{2} > 0$,

故存在唯一 x_0 ，使得 $f'(x_0)=0$ ；

又当 $x > x_0$ 时， $f'(x_0) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $0 < x < x_0$ 时， $f'(x_0) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；

因此， $f(x)$ 存在唯一的极值点；

(2) 由 (1) 知， $f(x_0) < f(1) = -2$ ，又 $f(e^2) = e^2 - 3 > 0$ ，

所以 $f(x)=0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内存在唯一实根，记作 $x = \alpha$ 。

由 $1 < x_0 < \alpha$ 得 $\frac{1}{\alpha} < 1 < x_0$ ，

又 $f(\frac{1}{\alpha}) = (\frac{1}{\alpha} - 1) \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$ ，

故 $\frac{1}{\alpha}$ 是方程 $f(x)=0$ 在 $(0, x_0)$ 内的唯一实根；

综上， $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数。

【点睛】

本题主要考查导数的应用，通常需要对函数求导，用导数的方法研究函数的单调性、极值、以及函数零点的问题，属于常考题型。

9. 【2019 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $0 < a < 3$ 时，记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M ，最小值为 m ，求 $M - m$ 的取值范围。

【答案】(1) 见详解；(2) $[\frac{8}{27}, 2)$ 。

【解析】

【分析】

(1) 先求 $f(x)$ 的导数，再根据 a 的范围分情况讨论函数单调性；(2) 讨论 a 的范围，利用函数单调性进行最大值和最小值的判断，最终求得 $M - m$ 的取值范围。

【详解】

(1) 对 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$ 求导得 $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x(x - \frac{a}{3})$ 。所以有

当 $a < 0$ 时， $(-\infty, \frac{a}{3})$ 区间上单调递增， $(\frac{a}{3}, 0)$ 区间上单调递减， $(0, +\infty)$ 区间上单调递增；

当 $a = 0$ 时， $(-\infty, +\infty)$ 区间上单调递增；

当 $a > 0$ 时, $(-\infty, 0)$ 区间上单调递增, $(0, \frac{a}{3})$ 区间上单调递减, $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 区间上单调递增.

(2)

若 $0 < a \leq 2$, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 单调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 单调递增, 所以区间 $[0, 1]$ 上最小值为 $f(\frac{a}{3})$. 而 $f(0) = 2, f(1) = 2 - a + 2 \geq f(0)$, 故所以区间 $[0, 1]$ 上最大值为 $f(1)$.

所以 $M - m = f(1) - f(\frac{a}{3}) = (4 - a) - [2(\frac{a}{3})^3 - a(\frac{a}{3})^2 + 2] = \frac{a^3}{27} - a + 2$, 设函数 $g(x) = \frac{x^3}{27} - x + 2$,

求导 $g'(x) = \frac{x^2}{9} - 1$ 当 $0 < x \leq 2$ 时 $g'(x) < 0$ 从而 $g(x)$ 单调递减. 而 $0 < a \leq 2$, 所以

$\frac{8}{27} \leq \frac{a^3}{27} - a + 2 < 2$. 即 $M - m$ 的取值范围是 $[\frac{8}{27}, 2)$.

若 $2 < a < 3$, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 单调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 单调递增, 所以区间 $[0, 1]$ 上最小值为 $f(\frac{a}{3})$ 而 $f(0) = 2, f(1) = 2 - a + 2 \leq f(0)$, 故所以区间 $[0, 1]$ 上最大值为 $f(0)$.

所以 $M - m = f(0) - f(\frac{a}{3}) = 2 - [2(\frac{a}{3})^3 - a(\frac{a}{3})^2 + 2] = \frac{a^3}{27}$, 而 $2 < a < 3$, 所以 $\frac{8}{27} < \frac{a^3}{27} < 1$. 即

$M - m$ 的取值范围是 $(\frac{8}{27}, 1)$.

综上得 $M - m$ 的取值范围是 $[\frac{8}{27}, 2)$.

【点睛】

(1) 这是一道常规的函数导数不等式和综合题, 题目难度比往年降低了不少. 考查的函数单调性, 最大值最小值这种基本概念的计算. 思考量不大, 由计算量补充.

10. 【2018 年新课标 1 卷文科】 【2018 年新课标 I 卷文】 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

【答案】 (1) $a = \frac{1}{2e^2}$; $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 单调递增. (2) 证明见解析.

【解析】

【详解】

分析: (1) 先确定函数的定义域, 对函数求导, 利用 $f'(2) = 0$, 求得 $a = \frac{1}{2e^2}$, 从而确定出函数的解析式, 之后观察导函数的解析式, 结合极值点的位置, 从而得到函数的增区间和减区间;

(2)结合指数函数的值域,可以确定当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$,之后构造新函数 $g(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$,利用导数研究函数的单调性,从而求得 $g(x) \geq g(1) = 0$,利用不等式的传递性,证得结果.

详解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = aex - \frac{1}{x}$.

由题设知, $f'(2) = 0$,所以 $a = \frac{1}{2e^2}$.

从而 $f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1$, $f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x}$.

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$;当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减,在 $(2, +\infty)$ 单调递增.

(2)当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$.

设 $g(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$,则 $g'(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{1}{x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$;当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$.所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的最小值点.

故当 $x > 0$ 时, $g(x) \geq g(1) = 0$.

因此,当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

点睛:该题考查的是有关导数的应用问题,涉及到的知识点有导数与极值、导数与最值、导数与函数的单调性的关系以及证明不等式问题,在解题的过程中,首先要保证函数的生存权,先确定函数的定义域,之后根据导数与极值的关系求得参数值,之后利用极值的特点,确定出函数的单调区间,第二问在求解的时候构造新函数,应用不等式的传递性证得结果.

11.【2018年新课标2卷文科】已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

(1)若 $a=3$,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)证明: $f(x)$ 只有一个零点.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$, $(3+2\sqrt{3}, +\infty)$ 单调递增,在 $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ 单调递减.

(2)见解析.

【解析】

【详解】

分析：(1) 将 $a=3$ 代入，求导得 $f'(x)=x^2-6x-3$ ，令 $f'(x)>0$ 求得增区间，令 $f'(x)<0$ 求

得减区间；(2) 令 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)=0$ ，即 $\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$ ，则将问题转化为函数

$g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$ 只有一个零点问题，研究函数 $g(x)$ 单调性可得。

详解：(1) 当 $a=3$ 时， $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$ ， $f'(x)=x^2-6x-3$ 。

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=3-2\sqrt{3}$ 或 $x=3+2\sqrt{3}$ 。

当 $x\in(-\infty, 3-2\sqrt{3})\cup(3+2\sqrt{3}, +\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ；

当 $x\in(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ 时， $f'(x)<0$ 。

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ ， $(3+2\sqrt{3}, +\infty)$ 单调递增，在 $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ 单调递减。

(2) 由于 $x^2+x+1>0$ ，所以 $f(x)=0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$ 。

设 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$ ，则 $g'(x)=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geq 0$ ，仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$ ，所以 $g(x)$

在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增。故 $g(x)$ 至多有一个零点，从而 $f(x)$ 至多有一个零点。

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\frac{1}{3}=-6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}<0$ ， $f(3a+1)=\frac{1}{3}>0$ ，故 $f(x)$ 有一个零点。

综上， $f(x)$ 只有一个零点。

点睛：(1) 用导数求函数单调区间的步骤如下：①确定函数 $f(x)$ 的定义域；②求导数 $f'(x)$ ；

③由 $f'(x)>0$ （或 $f'(x)<0$ ）解出相应的 x 的取值范围，当 $f'(x)>0$ 时， $f(x)$ 在相应区间上是增函数；当 $f'(x)<0$ 时， $f(x)$ 在相应区间上是减函数。

(2) 本题第二问重在考查零点存在性问题，解题的关键在于将问题转化为求证函数 $g(x)$ 有唯一零点，可先证明其单调，再结合零点存在性定理进行论证。

12. 【2018 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$ 。

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程；

(2) 证明：当 $a\geq 1$ 时， $f(x)+e\geq 0$ 。

【答案】(1) 切线方程是 $2x-y-1=0$ (2) 证明见解析

【解析】

【分析】

(1) 求导，由导数的几何意义求出切线方程.

(2) 当 $a \geq 1$ 时， $f(x) + e \geq (e^{x+1} + x^2 + x - 1)e^{-x}$ ，令 $g(x) = e^{x+1} + x^2 + x - 1$ ，只需证明 $g(x) \geq 0$ 即可.

【详解】

$$(1) f'(x) = \frac{-ax^2 + (2a-1)x + 2}{e^x}, f'(0) = 2.$$

因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程是 $2x - y - 1 = 0$.

$$(2) \text{ 当 } a \geq 1 \text{ 时, } f(x) + e \geq (x^2 + x - 1 + e^{x+1})e^{-x}.$$

$$\text{令 } g(x) = x^2 + x - 1 + e^{x+1}, \text{ 则 } g'(x) = 2x + 1 + e^{x+1}, g''(x) = 2 + e^{x+1} > 0$$

当 $x < -1$ 时， $g'(x) < g'(-1) = 0$ ， $g(x)$ 单调递减；当 $x > -1$ 时， $g'(x) > g'(-1) = 0$ ， $g(x)$ 单调递增；

所以 $g(x) \geq g(-1) = 0$. 因此 $f(x) + e \geq 0$.

【点睛】

本题考查函数与导数的综合应用，由导数的几何意义可求出切线方程，第二问构造 $g(x) = e^{x+1} + x^2 + x - 1$ 很关键，本题有难度.

