

专题 03 导数及其应用（选填题）（理科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】已知 $a = \frac{31}{32}$, $b = \cos \frac{1}{4}$, $c = 4\sin \frac{1}{4}$, 则 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

【答案】A

【解析】

【分析】

由 $\frac{c}{b} = 4\tan \frac{1}{4}$ 结合三角函数的性质可得 $c > b$; 构造函数 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in (0, +\infty)$,

利用导数可得 $b > a$, 即可得解.

【详解】

因为 $\frac{c}{b} = 4\tan \frac{1}{4}$, 因为当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin x < x < \tan x$

所以 $\tan \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$, 即 $\frac{c}{b} > 1$, 所以 $c > b$;

设 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in (0, +\infty)$,

$f'(x) = -\sin x + x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

则 $f(\frac{1}{4}) > f(0) = 0$, 所以 $\cos \frac{1}{4} - \frac{31}{32} > 0$,

所以 $b > a$, 所以 $c > b > a$,

故选: A

2. 【2022 年新高考 1 卷】设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

【答案】C

【解析】

【分析】

构造函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, 导数判断其单调性, 由此确定 a, b, c 的大小.

【详解】

设 $f(x) = \ln(1+x) - x (x > -1)$, 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

所以 $f(\frac{1}{9}) < f(0) = 0$, 所以 $\ln \frac{10}{9} - \frac{1}{9} < 0$, 故 $\frac{1}{9} > \ln \frac{10}{9} = -\ln 0.9$, 即 $b > c$,

所以 $f(-\frac{1}{10}) < f(0) = 0$, 所以 $\ln \frac{9}{10} + \frac{1}{10} < 0$, 故 $\frac{9}{10} < e^{-\frac{1}{10}}$, 所以 $\frac{1}{10} e^{\frac{1}{10}} < \frac{1}{9}$,

故 $a < b$,

设 $g(x) = xe^x + \ln(1-x) (0 < x < 1)$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}$,

令 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$, $h'(x) = e^x(x^2+2x-1)$,

当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递减,

当 $\sqrt{2}-1 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递增,

又 $h(0) = 0$,

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $h(x) < 0$,

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ 单调递增,

所以 $g(0.1) > g(0) = 0$, 即 $0.1e^{0.1} > -\ln 0.9$, 所以 $a > c$

故选: C.

3. 【2021 年新高考 1 卷】若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线, 则 ()

A. $e^b < a$

B. $e^a < b$

C. $0 < a < e^b$

D. $0 < b < e^a$

【答案】D

【解析】

【分析】

解法一: 根据导数几何意义求得切线方程, 再构造函数, 利用导数研究函数图象, 结合图形确定结果;

解法二: 画出曲线 $y=e^x$ 的图象, 根据直观即可判定点 (a,b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.

【详解】

在曲线 $y=e^x$ 上任取一点 $P(t, e^t)$, 对函数 $y=e^x$ 求导得 $y'=e^x$,

所以, 曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$, 即 $y=e^t x+(1-t)e^t$,

由题意可知, 点 (a,b) 在直线 $y=e^t x+(1-t)e^t$ 上, 可得 $b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$,

令 $f(t)=(a+1-t)e^t$, 则 $f'(t)=(a-t)e^t$.

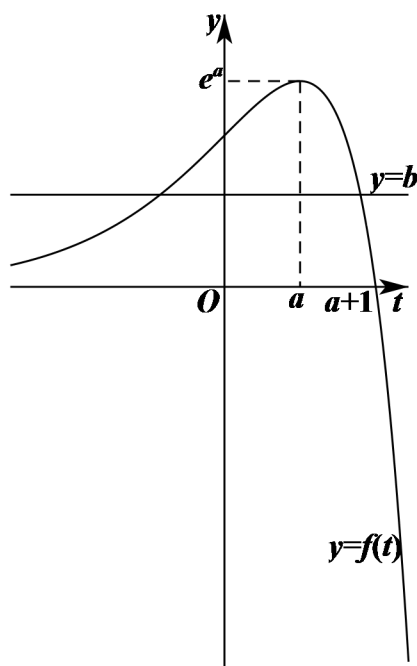
当 $t < a$ 时, $f'(t) > 0$, 此时函数 $f(t)$ 单调递增,

当 $t > a$ 时, $f'(t) < 0$, 此时函数 $f(t)$ 单调递减,

所以, $f(t)_{\max} = f(a) = e^a$,

由题意可知, 直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(t)$ 的图象有两个交点, 则 $b < f(t)_{\max} = e^a$,

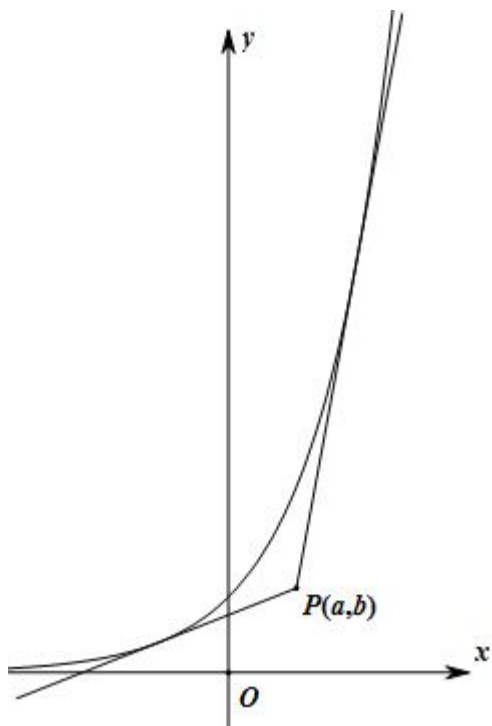
当 $t < a+1$ 时, $f(t) > 0$, 当 $t > a+1$ 时, $f(t) < 0$, 作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示:



由图可知, 当 $0 < b < e^a$ 时, 直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(t)$ 的图象有两个交点.

故选: D.

解法二: 画出函数曲线 $y = e^x$ 的图象如图所示, 根据直观即可判定点 (a, b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线. 由此可知 $0 < b < e^a$.



故选：D.

【点睛】

解法一是严格的证明求解方法，其中的极限处理在中学知识范围内需要用到指数函数的增长特性进行估计，解法二是根据基于对指数函数的图象的清晰的理解与认识的基础上，直观解决问题的有效方法.

4. 【2020 年新课标 1 卷理科】函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()

A. $y = -2x - 1$

B. $y = -2x + 1$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = 2x + 1$

【答案】B

【解析】

【分析】

求得函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ ，计算出 $f(1)$ 和 $f'(1)$ 的值，可得出所求切线的点斜式方程，化简即可.

【详解】

$$\because f(x) = x^4 - 2x^3, \therefore f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \therefore f(1) = -1, f'(1) = -2,$$

因此，所求切线的方程为 $y + 1 = -2(x - 1)$ ，即 $y = -2x + 1$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用导数求解函数图象的切线方程，考查计算能力，属于基础题

5. 【2020 年新课标 3 卷理科】若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为 ()

- A. $y=2x+1$ B. $y=2x+\frac{1}{2}$ C. $y=\frac{1}{2}x+1$ D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据导数的几何意义设出直线 l 的方程，再由直线与圆相切的性质，即可得出答案.

【详解】

设直线 l 在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的切点为 $(x_0, \sqrt{x_0})$ ，则 $x_0 > 0$ ，

函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，则直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ，

设直线 l 的方程为 $y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$ ，即 $x-2\sqrt{x_0}y+x_0=0$ ，

由于直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 相切，则 $\frac{x_0}{\sqrt{1+4x_0}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ，

两边平方并整理得 $5x_0^2-4x_0-1=0$ ，解得 $x_0=1$ ， $x_0=-\frac{1}{5}$ （舍），

则直线 l 的方程为 $x-2y+1=0$ ，即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了导数的几何意义的应用以及直线与圆的位置的应用，属于中档题.

6. 【2019 年新课标 3 卷理科】已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$ ，
则

- A. $a=e, b=-1$ B. $a=e, b=1$ C. $a=e^{-1}, b=1$ D. $a=e^{-1}, b=-1$

【答案】D

【解析】

通过求导数，确定得到切线斜率的表达式，求得 a ，将点的坐标代入直线方程，求得 b .

【详解】

详解： $y' = ae^x + \ln x + 1$,

$$k = y'|_{x=1} = ae + 1 = 2, \therefore a = e^{-1}$$

将 $(1,1)$ 代入 $y = 2x + b$ 得 $2 + b = 1, b = -1$, 故选 D.

【点睛】

本题关键得到含有 a, b 的等式, 利用导数几何意义和点在曲线上得到方程关系.

7. 【2018 年新课标 1 卷理科】 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为()

- A. $y = -2x$ B. $y = -x$ C. $y = 2x$ D. $y = x$

【答案】 D

【解析】

【详解】

分析： 利用奇函数偶次项系数为零求得 $a = 1$, 进而得到 $f(x)$ 的解析式, 再对 $f(x)$ 求导得出切线的斜率 k , 进而求得切线方程.

详解： 因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$,

$$\text{所以 } f(x) = x^3 + x, \quad f'(x) = 3x^2 + 1,$$

$$\text{所以 } f'(0) = 1, f(0) = 0,$$

$$\text{所以曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (0, 0) \text{ 处的切线方程为 } y - f(0) = f'(0)x,$$

化简可得 $y = x$, 故选 D.

点睛： 该题考查的是有关曲线 $y = f(x)$ 在某个点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程的问题, 在求解的过程中, 首先需要确定函数解析式, 此时利用到结论多项式函数中, 奇函数不存在偶次项, 偶函数不存在奇次项, 从而求得相应的参数值, 之后利用求导公式求得 $f'(x)$, 借助于导数的几何意义, 结合直线方程的点斜式求得结果.

8. 【2022 年新高考 1 卷】 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 ()

- A. $f(x)$ 有两个极值点 B. $f(x)$ 有三个零点
C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心 D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【答案】 AC

【解析】

【分析】

利用极值点的定义可判断 A，结合 $f(x)$ 的单调性、极值可判断 B，利用平移可判断 C；利用导数的几何意义判断 D.

【详解】

由题， $f'(x) = 3x^2 - 1$ ，令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

令 $f'(x) < 0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递减，在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ， $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点，故 A 正确；

因 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ ， $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ ， $f(-2) = -5 < 0$ ，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上有一个零点，

当 $x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时， $f(x) \geq f(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$ ，即函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上无零点，

综上所述，函数 $f(x)$ 有一个零点，故 B 错误；

令 $h(x) = x^3 - x$ ，该函数的定义域为 R ， $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$ ，

则 $h(x)$ 是奇函数， $(0,0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心，

将 $h(x)$ 的图象向上移动一个单位得到 $f(x)$ 的图象，

所以点 $(0,1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心，故 C 正确；

令 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2$ ，可得 $x = \pm 1$ ，又 $f(1) = f(-1) = 1$ ，

当切点为 $(1,1)$ 时，切线方程为 $y = 2x - 1$ ，当切点为 $(-1,1)$ 时，切线方程为 $y = 2x + 3$ ，

故 D 错误.

故选：AC.

9. 【2022 年全国乙卷】已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(\frac{1}{e}, 1)$

【解析】

【分析】

由 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ 的极小值点和极大值点，可得 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $x \in (x_1, x_2)$ 时， $f'(x) > 0$ ，再分 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 两种情况讨论，方程 $2\ln a \cdot$

$a^x - 2ex = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，即函数 $y = \ln a \cdot a^x$ 与函数 $y = ex$ 的图象有两个不同的交点，构造函数 $g(x) = \ln a \cdot a^x$ ，利用指数函数的图象和图象变换得到 $g(x)$ 的图象，利用导数的几何意义求得过原点的切线的斜率，根据几何意义可得出答案.

【详解】

解： $f'(x) = 2\ln a \cdot a^x - 2ex$ ，

因为 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上递减，在 (x_1, x_2) 上递增，

所以当 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (x_1, x_2)$ 时， $f'(x) > 0$ ，

若 $a > 1$ 时，当 $x < 0$ 时， $2\ln a \cdot a^x > 0, 2ex < 0$ ，则此时 $f'(x) > 0$ ，与前面矛盾，

故 $a > 1$ 不符合题意，

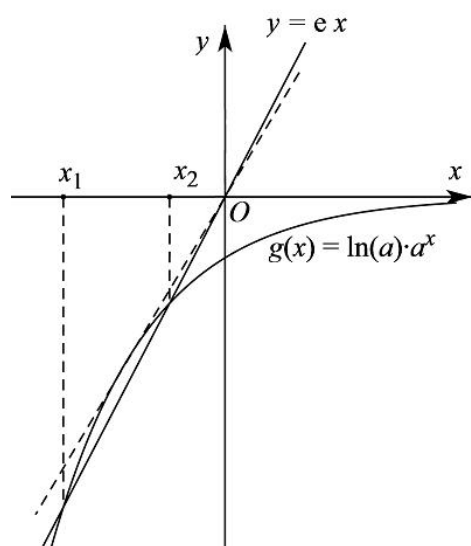
若 $0 < a < 1$ 时，则方程 $2\ln a \cdot a^x - 2ex = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，

即方程 $\ln a \cdot a^x = ex$ 的两个根为 x_1, x_2 ，

即函数 $y = \ln a \cdot a^x$ 与函数 $y = ex$ 的图象有两个不同的交点，

$\because 0 < a < 1, \therefore$ 函数 $y = a^x$ 的图象是单调递减的指数函数，

又 $\because \ln a < 0, \therefore y = \ln a \cdot a^x$ 的图象由指数函数 $y = a^x$ 向下关于 x 轴作对称变换，然后将图象上的每个点的横坐标保持不变，纵坐标伸长或缩短为原来的 $|\ln a|$ 倍得到，如图所示：



设过原点且与函数 $y = g(x)$ 的图象相切的直线的切点为 $(x_0, \ln a \cdot a^{x_0})$ ，

则切线的斜率为 $g'(x_0) = \ln^2 a \cdot a^{x_0}$ ，

故切线方程为 $y - \ln a \cdot a^{x_0} = \ln^2 a \cdot a^{x_0}(x - x_0)$ ，

则有 $-\ln a \cdot a^{x_0} = -x_0 \ln^2 a \cdot a^{x_0}$ ，解得 $x_0 = \frac{1}{\ln a}$ ，

则切线的斜率为 $\ln^2 a \cdot a^{\frac{1}{\ln a}} = e \ln^2 a$,

因为函数 $y = \ln a \cdot a^x$ 与函数 $y = ex$ 的图象有两个不同的交点,

所以 $e \ln^2 a < e$, 解得 $\frac{1}{e} < a < e$,

又 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{1}{e} < a < 1$,

综上所述, a 的范围为 $(\frac{1}{e}, 1)$.

【点睛】

本题考查了函数的极值点问题, 考查了导数的几何意义, 考查了转化思想及分类讨论思想, 有一定的难度.

10. 【2022 年新高考 1 卷】若曲线 $y = (x + a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【解析】

【分析】

设出切点横坐标 x_0 , 利用导数的几何意义求得切线方程, 根据切线经过原点得到关于 x_0 的方程, 根据此方程应有两个不同的实数根, 求得 a 的取值范围.

【详解】

$\because y = (x + a)e^x, \therefore y' = (x + 1 + a)e^x$,

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = (x_0 + a)e^{x_0}$, 切线斜率 $k = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}$,

切线方程为: $y - (x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(x - x_0)$,

$\because$ 切线过原点, $\therefore -(x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(-x_0)$,

整理得: $x_0^2 + ax_0 - a = 0$,

$\because$ 切线有两条, $\therefore \Delta = a^2 + 4a > 0$, 解得 $a < -4$ 或 $a > 0$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$,

故答案为: $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

11. 【2022 年新高考 2 卷】曲线 $y = \ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为_____, _____.

【答案】 $y = \frac{1}{e}x$ $y = -\frac{1}{e}x$

【解析】

【分析】

分 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况,当 $x > 0$ 时设切点为 $(x_0, \ln x_0)$,求出函数的导函数,即可求出切线的斜率,从而表示出切线方程,再根据切线过坐标原点求出 x_0 ,即可求出切线方程,当 $x < 0$ 时同理可得;

【详解】

解: 因为 $y = \ln|x|$,

当 $x > 0$ 时 $y = \ln x$,设切点为 $(x_0, \ln x_0)$,由 $y' = \frac{1}{x}$,所以 $y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$,所以切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

$$\ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

又切线过坐标原点,所以 $-\ln x_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0)$,解得 $x_0 = e$,所以切线方程为 $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$,

$$\text{即 } y = \frac{1}{e}x;$$

当 $x < 0$ 时 $y = \ln(-x)$,设切点为 $(x_1, \ln(-x_1))$,由 $y' = \frac{1}{x}$,所以 $y'|_{x=x_1} = \frac{1}{x_1}$,所以切线方程

$$\text{为 } y - \ln(-x_1) = \frac{1}{x_1}(x - x_1),$$

又切线过坐标原点,所以 $-\ln(-x_1) = \frac{1}{x_1}(-x_1)$,解得 $x_1 = -e$,所以切线方程为 $y - 1 =$

$$\frac{1}{-e}(x + e), \text{ 即 } y = -\frac{1}{e}x;$$

故答案为: $y = \frac{1}{e}x$; $y = -\frac{1}{e}x$

12. 【2021年甲卷理科】曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $5x - y + 2 = 0$

【解析】

【分析】

先验证点在曲线上,再求导,代入切线方程公式即可.

【详解】

由题,当 $x = -1$ 时, $y = -3$,故点在曲线上.

$$\text{求导得: } y' = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}, \text{ 所以 } y'|_{x=-1} = 5.$$

故切线方程为 $5x - y + 2 = 0$.

故答案为: $5x - y + 2 = 0$.

13. 【2021 年新高考 2 卷】已知函数 $f(x) = |e^x - 1|, x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 取值范围是_____.

【答案】 $(0, 1)$

【解析】

【分析】

结合导数的几何意义可得 $x_1 + x_2 = 0$, 结合直线方程及两点间距离公式可得

$$|AM| = \sqrt{1 + e^{2x_1}} \cdot |x_1|, \quad |BN| = \sqrt{1 + e^{2x_2}} \cdot |x_2|, \quad \text{化简即可得解.}$$

【详解】

$$\text{由题意, } f(x) = |e^x - 1| = \begin{cases} 1 - e^x, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \text{则 } f'(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases},$$

$$\text{所以点 } A(x_1, 1 - e^{x_1}) \text{ 和点 } B(x_2, e^{x_2} - 1), \quad k_{AM} = -e^{x_1}, k_{BN} = e^{x_2},$$

$$\text{所以 } -e^{x_1} \cdot e^{x_2} = -1, x_1 + x_2 = 0,$$

$$\text{所以 } AM: y - 1 + e^{x_1} = -e^{x_1}(x - x_1), M(0, e^{x_1}x_1 - e^{x_1} + 1),$$

$$\text{所以 } |AM| = \sqrt{x_1^2 + (e^{x_1}x_1)^2} = \sqrt{1 + e^{2x_1}} \cdot |x_1|,$$

$$\text{同理 } |BN| = \sqrt{1 + e^{2x_2}} \cdot |x_2|,$$

$$\text{所以 } \frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x_1}} \cdot |x_1|}{\sqrt{1 + e^{2x_2}} \cdot |x_2|} = \sqrt{\frac{1 + e^{2x_1}}{1 + e^{2x_2}}} = \sqrt{\frac{1 + e^{2x_1}}{1 + e^{-2x_1}}} = e^{x_1} \in (0, 1).$$

故答案为: $(0, 1)$

【点睛】

关键点点睛:

解决本题的关键是利用导数的几何意义转化条件 $x_1 + x_2 = 0$, 消去一个变量后, 运算即可得解.

14. 【2019 年新课标 1 卷理科】曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $3x - y = 0$.

【解析】

【分析】

本题根据导数的几何意义，通过求导数，确定得到切线的斜率，利用直线方程的点斜式求得切线方程

【详解】

详解： $y' = 3(2x+1)e^x + 3(x^2+x)e^x = 3(x^2+3x+1)e^x$,

所以， $k = y'|_{x=0} = 3$

所以，曲线 $y = 3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y = 3x$ ，即 $3x - y = 0$ 。

【点睛】

准确求导数是进一步计算的基础，本题易因为导数的运算法则掌握不熟，二导致计算错误。求导要“慢”，计算要准，是解答此类问题的基本要求。

15. 【2018 年新课标 1 卷理科】已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ ，则 $f(x)$ 的最小值是_____

_____.

【答案】 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【详解】

分析：首先对函数进行求导，化简求得 $f'(x) = 4(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$ ，从而确定出函数的单调区间，减区间为 $\left[2k\pi - \frac{5\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$ ，增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$ ，确定出函数的最小值点，从而求得 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入求得函数的最小值。

详解： $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 4(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$ ，所以当 $\cos x < \frac{1}{2}$ 时函数单调减，当 $\cos x > \frac{1}{2}$ 时函数单调增，从而得到函数的减区间为

$\left[2k\pi - \frac{5\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$ ，函数的增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$ ，所以当

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，此时 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $f(x)_{\min} =$

$2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，故答案是 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

点睛：该题考查的是有关应用导数研究函数的最小值问题，在求解的过程中，需要明确相关

的函数的求导公式，需要明白导数的符号与函数的单调性的关系，确定出函数的单调增区间和单调减区间，进而求得函数的最小值点，从而求得相应的三角函数值，代入求得函数的最小值.

16. 【2018 年新课标 2 卷理科】曲线 $y = 2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $y = 2x$

【解析】

【分析】

先求导数，再根据导数几何意义得切线斜率，最后根据点斜式求切线方程.

【详解】

$$\because y' = \frac{2}{x+1} \therefore k = \frac{2}{0+1} = 2 \therefore y = 2x$$

【点睛】

求曲线的切线要注意“过点 P 的切线”与“在点 P 处的切线”的差异，过点 P 的切线中，点 P 不一定是切点，点 P 也不一定在已知曲线上，而在点 P 处的切线，必以点 P 为切点.

17. 【2018 年新课标 3 卷理科】曲线 $y = (ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 ，则 $a =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】

求导，利用导数的几何意义计算即可.

【详解】

解： $y' = ae^x + (ax+1)e^x$

则 $f'(0) = a+1 = -2$

所以 $a = -3$

故答案为-3.

【点睛】

本题主要考查导数的计算和导数的几何意义，属于基础题.

