

专题 03 导数及其应用（选填题）（文科专用）

1. 【2022 年全国甲卷】当 $x = 1$ 时，函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 ，则 $f'(2) = (\quad)$

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意可知 $f(1) = -2$ ， $f'(1) = 0$ 即可解得 a, b ，再根据 $f'(x)$ 即可解出.

【详解】

因为函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，所以依题可知， $f(1) = -2$ ， $f'(1) = 0$ ，而 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$ ，

所以 $b = -2$ ， $a - b = 0$ ，即 $a = -2$ ， $b = -2$ ，所以 $f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递

增，在 $(1, +\infty)$ 上递减， $x = 1$ 时取最大值，满足题意，即有 $f'(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

故选：B.

2. 【2021 年乙卷文科】设 $a \neq 0$ ，若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 $(\quad)$

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < a^2$ D. $ab > a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】

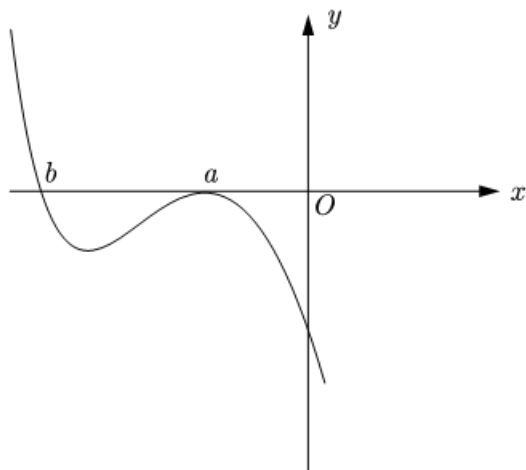
先考虑函数的零点情况，注意零点左右附近函数值是否变号，结合极大值点的性质，对 a 进行分类讨论，画出 $f(x)$ 图象，即可得到 a, b 所满足的关系，由此确定正确选项.

【详解】

若 $a = b$ ，则 $f(x) = a(x-a)^3$ 为单调函数，无极值点，不符合题意，故 $a \neq b$.

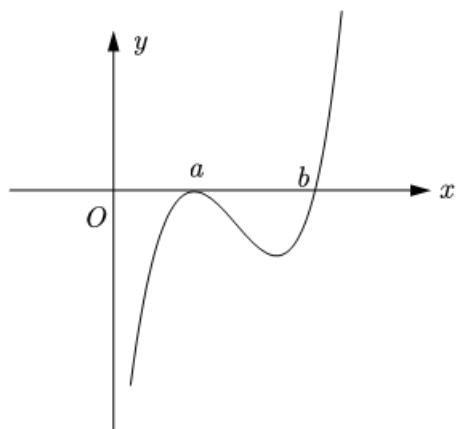
$\therefore f(x)$ 有 $x = a$ 和 $x = b$ 两个不同零点，且在 $x = a$ 左右附近是不变号，在 $x = b$ 左右附近是变号的. 依题意， $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点， $\therefore$ 在 $x = a$ 左右附近都是小于零的.

当 $a < 0$ 时，由 $x > b$ ， $f(x) \leq 0$ ，画出 $f(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b < a$ ， $a < 0$ ，故 $ab > a^2$ 。

当 $a > 0$ 时，由 $x > b$ 时， $f(x) > 0$ ，画出 $f(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b > a$ ， $a > 0$ ，故 $ab > a^2$ 。

综上所述， $ab > a^2$ 成立。

故选：D

【点睛】

本小题主要考查三次函数的图象与性质，利用数形结合的数学思想方法可以快速解答。

3. 【2019 年新课标 2 卷文科】曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为

A. $x-y-\pi-1=0$

B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$

D. $x+y-\pi+1=0$

【答案】C

【解析】

【分析】

先判定点 $(\pi, -1)$ 是否为切点，再利用导数的几何意义求解。

【详解】

当 $x = \pi$ 时, $y = 2\sin \pi + \cos \pi = -1$, 即点 $(\pi, -1)$ 在曲线 $y = 2\sin x + \cos x$

上. $\because y' = 2\cos x - \sin x$, $\therefore y'|_{x=\pi} = 2\cos \pi - \sin \pi = -2$, 则 $y = 2\sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为 $y - (-1) = -2(x - \pi)$, 即 $2x + y - 2\pi + 1 = 0$. 故选 C.

【点睛】

本题考查利用导数工具研究曲线的切线方程, 渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养. 采取导数法, 利用函数与方程思想解题. 学生易在非切点处直接求导而出错, 首先证明已知点是否为切点, 若是切点, 可以直接利用导数求解; 若不是切点, 设出切点, 再求导, 然后列出切线方程.

4. 【2020 年新课标 1 卷文科】曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为

_____.

【答案】 $y = 2x$

【解析】

【分析】

设切线的切点坐标为 (x_0, y_0) , 对函数求导, 利用 $y'|_{x_0} = 2$, 求出 x_0 , 代入曲线方程求出 y_0 , 得到切线的点斜式方程, 化简即可.

【详解】

设切线的切点坐标为 (x_0, y_0) , $y = \ln x + x + 1$, $y' = \frac{1}{x} + 1$,

$y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} + 1 = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, 所以切点坐标为 $(1, 2)$,

所求的切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x$.

故答案为: $y = 2x$.

【点睛】

本题考查导数的几何意义, 属于基础题.

5. 【2020 年新课标 3 卷文科】设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$. 若 $f'(1) = \frac{e}{4}$, 则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】

由题意首先求得导函数的解析式, 然后得到关于实数 a 的方程, 解方程即可确定实数 a 的值

【详解】

由函数的解析式可得： $f'(x) = \frac{e^x(x+a) - e^x}{(x+a)^2} = \frac{e^x(x+a-1)}{(x+a)^2}$ ，

则： $f'(1) = \frac{e^1 \times (1+a-1)}{(1+a)^2} = \frac{ae}{(a+1)^2}$ ，据此可得： $\frac{ae}{(a+1)^2} = \frac{e}{4}$ ，

整理可得： $a^2 - 2a + 1 = 0$ ，解得： $a = 1$ 。

故答案为：1.

【点睛】

本题主要考查导数的运算法则，导数的计算，方程的数学思想等知识，属于中等题.

6. 【2018 年新课标 2 卷文科】曲线 $y = 2 \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $y = 2x - 2$

【解析】

【分析】

求导 $f'(x) = \frac{2}{x}$ ，可得斜率 $k = f'(1) = 2$ ，进而得出切线的点斜式方程.

【详解】

由 $y = f(x) = 2 \ln x$ ，得 $f'(x) = \frac{2}{x}$ ，

则曲线 $y = 2 \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线的斜率为 $k = f'(1) = 2$ ，

则所求切线方程为 $y - 0 = 2(x - 1)$ ，即 $y = 2x - 2$ 。

【点睛】

求曲线在某点处的切线方程的步骤：①求出函数在该点处的导数值即为切线斜率；②写出切线的点斜式方程；③化简整理.

