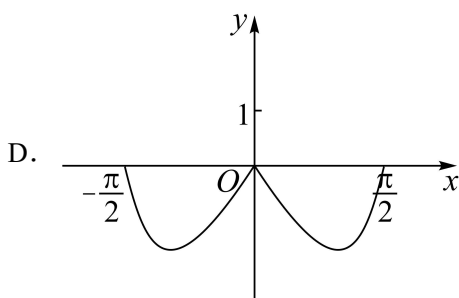
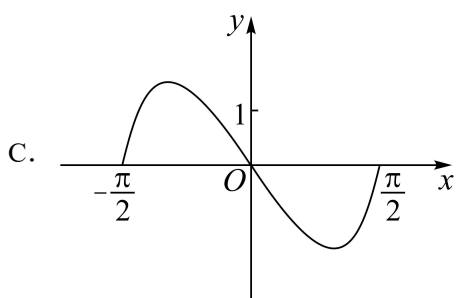
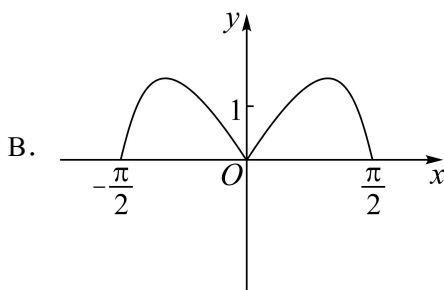
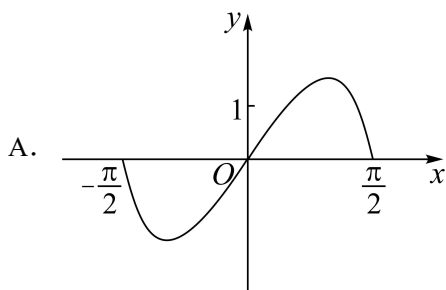


专题 02 函数的概念与基本初等函数 I

1. 【2022 年全国甲卷】函数 $y = (3^x - 3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图象大致为 ()



【答案】A

【解析】

【分析】

由函数的奇偶性结合指数函数、三角函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】

令 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\cos x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

则 $f(-x) = (3^{-x} - 3^x)\cos(-x) = -(3^x - 3^{-x})\cos x = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 排除 BD;

又当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $3^x - 3^{-x} > 0, \cos x > 0$, 所以 $f(x) > 0$, 排除 C.

故选: A.

2. 【2022 年全国甲卷】已知 $9^m = 10, a = 10^m - 11, b = 8^m - 9$, 则 ()

A. $a > 0 > b$

B. $a > b > 0$

C. $b > a > 0$

D. $b > 0 > a$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据指对互化以及对数函数的单调性即可知 $m = \log_9 10 > 1$, 再利用基本不等式, 换底公式

可得 $m > \lg 11$, $\log_8 9 > m$, 然后由指数函数的单调性即可解出.

【详解】

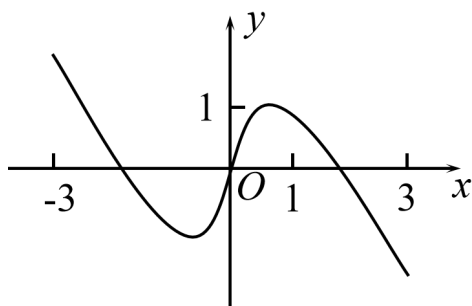
由 $9^m = 10$ 可得 $m = \log_9 10 = \frac{\lg 10}{\lg 9} > 1$, 而 $\lg 9 \lg 11 < \left(\frac{\lg 9 + \lg 11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2 < 1 = (\lg 10)^2$, 所以 $\frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10}$, 即 $m > \lg 11$, 所以 $a = 10^m - 11 > 10^{\lg 11} - 11 = 0$.

又 $\lg 8 \lg 10 < \left(\frac{\lg 8 + \lg 10}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2 < (\lg 9)^2$, 所以 $\frac{\lg 9}{\lg 8} > \frac{\lg 10}{\lg 9}$, 即 $\log_8 9 > m$,

所以 $b = 8^m - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 0$. 综上, $a > 0 > b$.

故选: A.

3. 【2022 年全国乙卷】如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3, 3]$ 的大致图像, 则该函数是 ()



A. $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

B. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$

D. $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$

【答案】A

【解析】

【分析】

由函数图像的特征结合函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】

设 $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$, 则 $f(1) = 0$, 故排除 B;

设 $h(x) = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $0 < \cos x < 1$,

所以 $h(x) = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1} < \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$, 故排除 C;

设 $g(x) = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$, 则 $g(3) = \frac{2 \sin 3}{10} > 0$, 故排除 D.

故选: A.

4. 【2022 年全国乙卷】已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x) + g(2 - x) = 5, g(x) -$

$f(x-4)=7$. 若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, $g(2)=4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=$ ()

A. -21 B. -22 C. -23 D. -24

【答案】D

【解析】

【分析】

根据对称性和已知条件得到 $f(x)+f(x-2)=-2$, 从而得到 $f(3)+f(5)+\dots+f(21)=-10$, $f(4)+f(6)+\dots+f(22)=-10$, 然后根据条件得到 $f(2)$ 的值, 再由题意得到 $g(3)=6$ 从而得到 $f(1)$ 的值即可求解.

【详解】

因为 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称,

所以 $g(2-x)=g(x+2)$,

因为 $g(x)-f(x-4)=7$, 所以 $g(x+2)-f(x-2)=7$, 即 $g(x+2)=7+f(x-2)$,

因为 $f(x)+g(2-x)=5$, 所以 $f(x)+g(x+2)=5$,

代入得 $f(x)+[7+f(x-2)]=5$, 即 $f(x)+f(x-2)=-2$,

所以 $f(3)+f(5)+\dots+f(21)=(-2)\times 5=-10$,

$f(4)+f(6)+\dots+f(22)=(-2)\times 5=-10$.

因为 $f(x)+g(2-x)=5$, 所以 $f(0)+g(2)=5$, 即 $f(0)=1$, 所以 $f(2)=-2-f(0)=-3$.

因为 $g(x)-f(x-4)=7$, 所以 $g(x+4)-f(x)=7$, 又因为 $f(x)+g(2-x)=5$,

联立得, $g(2-x)+g(x+4)=12$,

所以 $y=g(x)$ 的图像关于点 $(3,6)$ 中心对称, 因为函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $g(3)=6$

因为 $f(x)+g(x+2)=5$, 所以 $f(1)=5-g(3)=-1$.

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+[f(3)+f(5)+\dots+f(21)]+[f(4)+f(6)+\dots+f(22)]=-1-3-10-10=-24$.

故选: D

【点睛】

含有对称轴或对称中心的问题往往条件比较隐蔽, 考生需要根据已知条件进行恰当的转化, 然后得到所需的一些数值或关系式从而解题.

5. 【2022年新高考2卷】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+y)+f(x-y)=$

$f(x)f(y), f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$

- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】

根据题意赋值即可知函数 $f(x)$ 的一个周期为 6, 求出函数一个周期中的 $f(1), f(2), \dots, f(6)$ 的值, 即可解出.

【详解】

因为 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, 令 $x=1, y=0$ 可得, $2f(1) = f(1)f(0)$, 所以 $f(0) = 2$, 令 $x=0$ 可得, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, 即 $f(y) = f(-y)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 令 $y=1$ 得, $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1) = f(x)$, 即有 $f(x+2) + f(x) = f(x+1)$, 从而可知 $f(x+2) = -f(x-1)$, $f(x-1) = -f(x-4)$, 故 $f(x+2) = f(x-4)$, 即 $f(x) = f(x+6)$, 所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6.

因为 $f(2) = f(1) - f(0) = 1 - 2 = -1$, $f(3) = f(2) - f(1) = -1 - 1 = -2$, $f(4) = f(-2) = f(2) = -1$, $f(5) = f(-1) = f(1) = 1$, $f(6) = f(0) = 2$, 所以一个周期内的 $f(1) + f(2) + \dots + f(6) = 0$. 由于 22 除以 6 余 4, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3$.

故选: A.

6. 【2021 年甲卷文科】下列函数中是增函数的为 ()

- A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】

对于 A, $f(x) = -x$ 为 R 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 B, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为 R 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 C, $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数, 不合题意, 舍.

对于 D, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 为 R 上的增函数, 符合题意,

故选: D.

7. 【2021 年甲卷文科】青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录表的数据 V 的满足 $L=5+\lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据为 () ($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$)

- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

【答案】C

【解析】

【分析】

根据 L, V 关系, 当 $L=4.9$ 时, 求出 $\lg V$, 再用指数表示 V , 即可求解.

【详解】

由 $L=5+\lg V$, 当 $L=4.9$ 时, $\lg V=-0.1$,

则 $V=10^{-0.1}=10^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx \frac{1}{1.259} \approx 0.8$.

故选: C.

8. 【2021 年甲卷文科】设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 且 $f(1+x)=f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=$ ()

- A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】

由题意利用函数的奇偶性和函数的递推关系即可求得 $f\left(\frac{5}{3}\right)$ 的值.

【详解】

由题意可得: $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(1+\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-f\left(\frac{2}{3}\right)$,

而 $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(1-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$,

故 $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

故选：C.

【点睛】

关键点点睛：本题主要考查了函数的奇偶性和函数的递推关系式，灵活利用所给的条件进行转化是解决本题的关键.

9. 【2021 年甲卷理科】 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ， $f(x+1)$ 为奇函数， $f(x+2)$ 为偶函数，

当 $x \in [1, 2]$ 时， $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$ ，则 $f\left(\frac{9}{2}\right) = (\quad)$

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

通过 $f(x+1)$ 是奇函数和 $f(x+2)$ 是偶函数条件，可以确定出函数解析式 $f(x) = -2x^2 + 2$ ，

进而利用定义或周期性结论，即可得到答案.

【详解】

因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ①；

因为 $f(x+2)$ 是偶函数，所以 $f(x+2) = f(-x+2)$ ②.

令 $x=1$ ，由①得： $f(0) = -f(2) = -(4a+b)$ ，由②得： $f(3) = f(1) = a+b$ ，

因为 $f(0) + f(3) = 6$ ，所以 $-(4a+b) + a+b = 6 \Rightarrow a = -2$ ，

令 $x=0$ ，由①得： $f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow b = 2$ ，所以 $f(x) = -2x^2 + 2$.

思路一：从定义入手.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{2}\right) &= f\left(\frac{5}{2}+2\right) = f\left(-\frac{5}{2}+2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= f\left(-\frac{3}{2}+1\right) = -f\left(\frac{3}{2}+1\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right) \\ -f\left(\frac{5}{2}\right) &= -f\left(\frac{1}{2}+2\right) = -f\left(-\frac{1}{2}+2\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) \\ \text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right) &= -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

思路二：从周期性入手

由两个对称性可知，函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$.

$$\text{所以 } f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} .$$

故选：D.

【点睛】

在解决函数性质类问题的时候，我们通常可以借助一些二级结论，求出其周期性进而达到简便计算的效果.

10. 【2021 年乙卷文科】 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是 ()

- A. $f(x-1)-1$ B. $f(x-1)+1$ C. $f(x+1)-1$ D. $f(x+1)+1$

【答案】B

【解析】

【分析】

分别求出选项的函数解析式，再利用奇函数的定义即可.

【详解】

由题意可得 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$,

对于 A, $f(x-1)-1 = \frac{2}{x} - 2$ 不是奇函数;

对于 B, $f(x-1)+1 = \frac{2}{x}$ 是奇函数;

对于 C, $f(x+1)-1 = \frac{2}{x+2} - 2$, 定义域不关于原点对称, 不是奇函数;

对于 D, $f(x+1)+1 = \frac{2}{x+2}$, 定义域不关于原点对称, 不是奇函数.

故选：B

【点睛】

本题主要考查奇函数定义，考查学生对概念的理解，是一道容易题.

11. 【2021 年乙卷理科】 设 $a = 2\ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$. 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

【答案】B

【解析】

【分析】

利用对数的运算和对数函数的单调性不难对 a, b 的大小作出判定, 对于 a 与 c , b 与 c 的大小关系, 将 0.01 换成 x , 分别构造函数 $f(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1$,

$g(x) = \ln(1+2x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 利用导数分析其在 0 的右侧包括 0.01 的较小范围内的单调性, 结合 $f(0)=0, g(0)=0$ 即可得出 a 与 c , b 与 c 的大小关系.

【详解】

$$a = 2\ln 1.01 = \ln 1.01^2 = \ln(1+0.01)^2 = \ln(1+2 \times 0.01 + 0.01^2) > \ln 1.02 = c,$$

所以 $b < a$;

下面比较 c 与 a, b 的大小关系.

$$\text{记 } f(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1, \text{ 则 } f(0) = 0, f'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2(\sqrt{1+4x} - 1 - x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}},$$

$$\text{由于 } 1+4x - (1+x)^2 = 2x - x^2 = x(2-x)$$

$$\text{所以当 } 0 < x < 2 \text{ 时, } 1+4x - (1+x)^2 > 0, \text{ 即 } \sqrt{1+4x} > (1+x), f'(x) > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(0.01) > f(0) = 0, \text{ 即 } 2\ln 1.01 > \sqrt{1.04} - 1, \text{ 即 } a > c;$$

$$\text{令 } g(x) = \ln(1+2x) - \sqrt{1+4x} + 1, \text{ 则 } g(0) = 0, g'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2(\sqrt{1+4x} - 1 - 2x)}{(1+2x)\sqrt{1+4x}},$$

$$\text{由于 } 1+4x - (1+2x)^2 = -4x^2, \text{ 在 } x > 0 \text{ 时, } 1+4x - (1+2x)^2 < 0,$$

$$\text{所以 } g'(x) < 0, \text{ 即函数 } g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递减, 所以 } g(0.01) < g(0) = 0, \text{ 即 } \ln 1.02 < \sqrt{1.04} - 1,$$

即 $b < c$;

综上, $b < c < a$,

故选: B.

【点睛】

本题考查比较大小问题, 难度较大, 关键难点是将各个值中的共同的量用变量替换, 构造函数, 利用导数研究相应函数的单调性, 进而比较大小, 这样的问题, 凭借近似估计计算往往是无法解决的.

12. 【2021 年新高考 2 卷】已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是 ()

A. $c < b < a$

B. $b < a < c$

C. $a < c < b$

D. $a < b < c$

【答案】C

【解析】

【分析】

对数函数的单调性可比较 a 、 b 与 c 的大小关系，由此可得出结论.

【详解】

$$a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = \log_8 2\sqrt{2} < \log_8 3 = b, \text{ 即 } a < c < b.$$

故选：C.

13. 【2021 年新高考 2 卷】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(x+2)$ 为偶函数， $f(2x+1)$ 为奇函数，则 ()

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

B. $f(-1) = 0$

C. $f(2) = 0$

D. $f(4) = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】

推导出函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，由已知条件得出 $f(1) = 0$ ，结合已知条件可得出结论.

【详解】

因为函数 $f(x+2)$ 为偶函数，则 $f(2+x) = f(2-x)$ ，可得 $f(x+3) = f(1-x)$ ，

因为函数 $f(2x+1)$ 为奇函数，则 $f(1-2x) = -f(2x+1)$ ，所以， $f(1-x) = -f(x+1)$ ，

所以， $f(x+3) = -f(x+1) = f(x-1)$ ，即 $f(x) = f(x+4)$ ，

故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

因为函数 $F(x) = f(2x+1)$ 为奇函数，则 $F(0) = f(1) = 0$ ，

故 $f(-1) = -f(1) = 0$ ，其它三个选项未知.

故选：B.

14. 【2020 年新课标 1 卷理科】若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$ ，则 ()

A. $a > 2b$

B. $a < 2b$

C. $a > b^2$

D. $a < b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】

设 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ ，利用作差法结合 $f(x)$ 的单调性即可得到答案.

【详解】

设 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ ，则 $f(x)$ 为增函数，因为 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b = 2^{2b} + \log_2 b$

所以 $f(a) - f(2b) = 2^a + \log_2 a - (2^{2b} + \log_2 2b) = 2^{2b} + \log_2 b - (2^{2b} + \log_2 2b) = \log_2 \frac{1}{2} = -1 < 0$ ，

所以 $f(a) < f(2b)$ ，所以 $a < 2b$.

$f(a) - f(b^2) = 2^a + \log_2 a - (2^{b^2} + \log_2 b^2) = 2^{2b} + \log_2 b - (2^{b^2} + \log_2 b^2) = 2^{2b} - 2^{b^2} - \log_2 b$ ，

当 $b=1$ 时， $f(a) - f(b^2) = 2 > 0$ ，此时 $f(a) > f(b^2)$ ，有 $a > b^2$

当 $b=2$ 时， $f(a) - f(b^2) = -1 < 0$ ，此时 $f(a) < f(b^2)$ ，有 $a < b^2$ ，所以 C、D 错误.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查函数与方程的综合应用，涉及到构造函数，利用函数的单调性比较大小，是一道中档题.

15. 【2020 年新课标 1 卷文科】设 $a \log_3 4 = 2$ ，则 $4^{-a} =$ ()

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据已知等式，利用指数对数运算性质即可得解

【详解】

由 $a \log_3 4 = 2$ 可得 $\log_3 4^a = 2$ ，所以 $4^a = 9$ ，

所以有 $4^{-a} = \frac{1}{9}$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查的是有关指对式的运算的问题，涉及到的知识点有对数的运算法则，指数的运算法

则, 属于基础题目.

16. 【2020 年新课标 2 卷理科】设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ ()

- A. 是偶函数, 且在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增 B. 是奇函数, 且在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 单调递减
C. 是偶函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递增 D. 是奇函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递减

【答案】D

【解析】

【分析】

根据奇偶性的定义可判断出 $f(x)$ 为奇函数, 排除 AC; 当 $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时, 利用函数单调性的性质可判断出 $f(x)$ 单调递增, 排除 B; 当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ 时, 利用复合函数单调性可判断出 $f(x)$ 单调递减, 从而得到结果.

【详解】

由 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ 得 $f(x)$ 定义域为 $\{x | x \neq \pm \frac{1}{2}\}$, 关于坐标原点对称,

又 $f(-x) = \ln|1-2x| - \ln|-2x-1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为定义域上的奇函数, 可排除 AC;

当 $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时, $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x)$,

Q $y = \ln(2x+1)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递增, $y = \ln(1-2x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 排除 B;

当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ 时, $f(x) = \ln(-2x-1) - \ln(1-2x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)$,

$\therefore \mu = 1 + \frac{2}{2x-1}$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, $f(\mu) = \ln \mu$ 在定义域内单调递增,

根据复合函数单调性可知: $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, D 正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查函数奇偶性和单调性的判断; 判断奇偶性的方法是在定义域关于原点对称的前提下, 根据 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系得到结论; 判断单调性的关键是能够根据自变量的范围化简函数, 根据单调性的性质和复合函数“同增异减”性得到结论.

17. 【2020 年新课标 2 卷理科】若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ ，则 ()

- A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$ C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】

将不等式变为 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ ，根据 $f(t) = 2^t - 3^{-t}$ 的单调性知 $x < y$ ，以此去判断各个选项中真数与 1 的大小关系，进而得到结果.

【详解】

由 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ 得： $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ ，

令 $f(t) = 2^t - 3^{-t}$ ，

$\because y = 2^x$ 为 R 上的增函数， $y = 3^{-x}$ 为 R 上的减函数， $\therefore f(t)$ 为 R 上的增函数，

$\therefore x < y$ ，

$\because y - x > 0$ ， $\therefore y - x + 1 > 1$ ， $\therefore \ln(y - x + 1) > 0$ ， 则 A 正确，B 错误；

$\because |x - y|$ 与 1 的大小不确定，故 CD 无法确定.

故选：A.

【点睛】

本题考查对数式的大小的判断问题，解题关键是能够通过构造函数的方式，利用函数的单调性得到 x, y 的大小关系，考查了转化与化归的数学思想.

18. 【2020 年新课标 2 卷文科】设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ ，则 $f(x)$ ()

- A. 是奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 B. 是奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递减
C. 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 D. 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

【答案】A

【解析】

【分析】

根据函数的解析式可知函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，利用定义可得出函数 $f(x)$ 为奇函数，

再根据函数的单调性法则，即可解出.

【详解】

因为函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，其关于原点对称，而 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

又因为函数 $y = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，

而 $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查利用函数的解析式研究函数的性质，属于基础题.

19.【2020 年新课标 3 卷理科】Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域.有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病列数 $I(t)$ (t 的单位：天)的 Logistic 模型：

$I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ ，其中 K 为最大确诊病例数.当 $I(t^*) = 0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，

则 t^* 约为 () ($\ln 19 \approx 3$)

A. 60

B. 63

C. 66

D. 69

【答案】C

【解析】

【分析】

将 $t = t^*$ 代入函数 $I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ 结合 $I(t^*) = 0.95K$ 求得 t^* 即可得解.

【详解】

$\because I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ ，所以 $I(t^*) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t^*-53)}} = 0.95K$ ，则 $e^{0.23(t^*-53)} = 19$ ，

所以， $0.23(t^* - 53) = \ln 19 \approx 3$ ，解得 $t^* \approx \frac{3}{0.23} + 53 \approx 66$.

故选：C.

【点睛】

本题考查对数的运算，考查指数与对数的互化，考查计算能力，属于中等题.

20.【2020 年新课标 3 卷理科】已知 $5^5 < 8^4$ ， $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$ ， $b = \log_8 5$ ， $c = \log_{13} 8$ ，则 ()

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【答案】A

【解析】

【分析】

由题意可得 $a, b, c \in (0,1)$ ，利用作商法以及基本不等式可得出 a, b 的大小关系，由

$b = \log_8 5$ ，得 $8^b = 5$ ，结合 $5^5 < 8^4$ 可得出 $b < \frac{4}{5}$ ，由 $c = \log_{13} 8$ ，得 $13^c = 8$ ，结合 $13^4 < 8^5$ ，可得出 $c > \frac{4}{5}$ ，综合可得出 a, b, c 的大小关系.

【详解】

由题意可知 $a, b, c \in (0,1)$ ，

$$\frac{a}{b} = \frac{\log_5 3}{\log_8 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 5} < \frac{1}{(\lg 5)^2} \left(\frac{\lg 3 + \lg 8}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lg 3 + \lg 8}{2 \lg 5} \right)^2 = \left(\frac{\lg 24}{\lg 25} \right)^2 < 1, \therefore a < b;$$

由 $b = \log_8 5$ ，得 $8^b = 5$ ，由 $5^5 < 8^4$ ，得 $8^{5b} < 8^4$ ， $\therefore 5b < 4$ ，可得 $b < \frac{4}{5}$ ；

由 $c = \log_{13} 8$ ，得 $13^c = 8$ ，由 $13^4 < 8^5$ ，得 $13^{4c} < 13^{5c}$ ， $\therefore 5c > 4$ ，可得 $c > \frac{4}{5}$.

综上所述， $a < b < c$.

故选：A.

【点睛】

本题考查对数式的大小比较，涉及基本不等式、对数式与指数式的互化以及指数函数单调性的应用，考查推理能力，属于中等题.

21. 【2020 年新课标 3 卷文科】设 $a = \log_3 2$ ， $b = \log_5 3$ ， $c = \frac{2}{3}$ ，则 ()

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【答案】A

【解析】

【分析】

分别将 a, b 改写为 $a = \frac{1}{3} \log_3 2^3$ ， $b = \frac{1}{3} \log_5 3^3$ ，再利用单调性比较即可.

【详解】

因为 $a = \frac{1}{3} \log_3 2^3 < \frac{1}{3} \log_3 9 = \frac{2}{3} = c$ ， $b = \frac{1}{3} \log_5 3^3 > \frac{1}{3} \log_5 25 = \frac{2}{3} = c$ ，

所以 $a < c < b$.

故选：A.

【点睛】

本题考查对数式大小的比较，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

22. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型： $I(t) = e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位:天)的变化规律，指数增长率 r 与 R_0 ， T 近似满足 $R_0 = 1 + rT$.有学者基于已有数据估计出 $R_0 = 3.28$ ， $T = 6$.据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 $(\ln 2 \approx 0.69)$ ()

- A. 1.2 天
B. 1.8 天
C. 2.5 天
D. 3.5 天

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意可得 $I(t) = e^{rt} = e^{0.38t}$ ，设在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天，根据 $e^{0.38(t+t_1)} = 2e^{0.38t}$ ，解得 t_1 即可得结果.

【详解】

因为 $R_0 = 3.28$ ， $T = 6$ ， $R_0 = 1 + rT$ ，所以 $r = \frac{3.28-1}{6} = 0.38$ ，所以 $I(t) = e^{rt} = e^{0.38t}$ ，

设在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天，

则 $e^{0.38(t+t_1)} = 2e^{0.38t}$ ，所以 $e^{0.38t_1} = 2$ ，所以 $0.38t_1 = \ln 2$ ，

所以 $t_1 = \frac{\ln 2}{0.38} \approx \frac{0.69}{0.38} \approx 1.8$ 天.

故选：B.

【点睛】

本题考查了指数型函数模型的应用，考查了指数式化对数式，属于基础题.

23. 【2020 年新高考 1 卷（山东卷）】若定义在 R 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，且 $f(2) = 0$ ，则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

【答案】D

【解析】

【分析】

首先根据函数奇偶性与单调性，得到函数 $f(x)$ 在相应区间上的符号，再根据两个数的乘积大于等于零，分类转化为对应自变量不等式，最后求并集得结果.

【详解】

因为定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，且 $f(2) = 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调递减，且 $f(-2) = 0$ ， $f(0) = 0$ ，

所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时， $f(x) > 0$ ，当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时， $f(x) < 0$ ，

所以由 $xf(x-1) \geq 0$ 可得：

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \end{cases} \text{ 或 } x = 0$$

解得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 3$ ，

所以满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1, 0] \cup [1, 3]$ ，

故选：D.

【点睛】

本题考查利用函数奇偶性与单调性解抽象函数不等式，考查分类讨论思想方法，属中档题.

24. 【2020 年新高考 2 卷（海南卷）】已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增，则

a 的取值范围是（ ）

A. $(2, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(5, +\infty)$

D. $[5, +\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】

首先求出 $f(x)$ 的定义域，然后求出 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 的单调递增区间即可.

【详解】

由 $x^2 - 4x - 5 > 0$ 得 $x > 5$ 或 $x < -1$

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

因为 $y = x^2 - 4x - 5$ 在 $(5, +\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 在 $(5, +\infty)$ 上单调递增

所以 $a \geq 5$

故选：D

【点睛】

在求函数的单调区间时一定要先求函数的定义域.

25. 【2019 年新课标 1 卷理科】已知 $a = \log_2 0.2, b = 2^{0.2}, c = 0.2^{0.3}$ ，则

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

【答案】B

【解析】

【分析】

运用中间量 0 比较 a, c ，运用中间量 1 比较 b, c

【详解】

$a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$ ， $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$ ， $0 < 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$ ，则 $0 < c < 1, a < c < b$ ．故选 B.

【点睛】

本题考查指数和对数大小的比较，渗透了直观想象和数学运算素养．采取中间变量法，利用转化与化归思想解题．

26. 【2019 年新课标 2 卷理科】2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就，实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系．为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行． L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上．设地球质量为 M_1 ，月球质量为 M_2 ，地月距离为 R ， L_2 点到月球的距离为 r ，根据牛顿运动定律和万有引力定律， r 满足方程：

$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r) \frac{M_1}{R^3}.$$

设 $\alpha = \frac{r}{R}$ ，由于 α 的值很小，因此在近似计算中 $\frac{3\alpha^3 + 3\alpha^4 + \alpha^5}{(1+\alpha)^2} \approx 3\alpha^3$ ，则 r 的近似值为

A. $\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$

B. $\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$

C. $\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$

D. $\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题在正确理解题意的基础上，将有关式子代入给定公式，建立 α 的方程，解方程、近似计算。题目所处位置应是“解答题”，但由于题干较长，易使考生“望而生畏”，注重了阅读理解、数学式子的变形及运算求解能力的考查。

【详解】

由 $\alpha = \frac{r}{R}$ ，得 $r = \alpha R$

因为 $\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r) \frac{M_1}{R^3}$ ，

所以 $\frac{M_1}{R^2(1+\alpha)^2} + \frac{M_2}{\alpha^2 R^2} = (1+\alpha) \frac{M_1}{R^2}$ ，

即 $\frac{M_2}{M_1} = \alpha^2 \left[(1+\alpha) - \frac{1}{(1+\alpha)^2} \right] = \frac{\alpha^5 + 3\alpha^4 + 3\alpha^3}{(1+\alpha)^2} \approx 3\alpha^3$ ，

解得 $\alpha = \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$ ，

所以 $r = \alpha R = \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} R$ 。

【点睛】

由于本题题干较长，所以，易错点之一就是能否静心读题，正确理解题意；易错点之二是复杂式子的变形出错。

27. 【2019 年新课标 2 卷理科】设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，满足 $f(x+1) = 2f(x)$ ，且当 $x \in (0, 1]$ 时， $f(x) = x(x-1)$ 。若对任意 $x \in (-\infty, m]$ ，都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$ ，则 m 的取值范围是

A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

B. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

D. $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题为选择压轴题，考查函数平移伸缩，恒成立问题，需准确求出函数每一段解析式，分析出临界点位置，精准运算得到解决。

【详解】

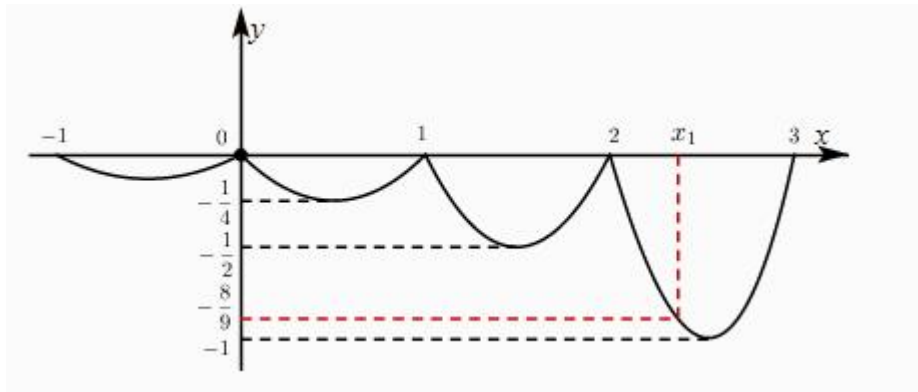
$\because x \in (0, 1]$ 时， $f(x) = x(x-1)$ ， $f(x+1) = 2f(x)$ ， $\therefore f(x) = 2f(x-1)$ ，即 $f(x)$ 右移 1 个单位，

图像变为原来的 2 倍.

如图所示: 当 $2 < x \leq 3$ 时, $f(x)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)$, 令 $4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$, 整理得:

$$9x^2 - 45x + 56 = 0, \therefore (3x-7)(3x-8) = 0, \therefore x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = \frac{8}{3} \text{ (舍)}, \therefore x \in (-\infty, m] \text{ 时}, f(x) \geq -\frac{8}{9}$$

成立, 即 $m \leq \frac{7}{3}$, $\therefore m \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$, 故选 B.



【点睛】

易错警示: 图像解析式求解过程容易求反, 画错示意图, 画成向左侧扩大到 2 倍, 导致题目出错, 需加深对抽象函数表达式的理解, 平时应加强这方面练习, 提高抽象概括、数学建模能力.

28. 【2019 年新课标 2 卷文科】设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ =

A. $e^{-x} - 1$

B. $e^{-x} + 1$

C. $-e^{-x} - 1$

D. $-e^{-x} + 1$

【答案】D

【解析】

【分析】

先把 $x < 0$, 转化为 $-x > 0$, 代入可得 $f(-x)$, 结合奇偶性可得 $f(x)$.

【详解】

$\because f(x)$ 是奇函数, $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$.

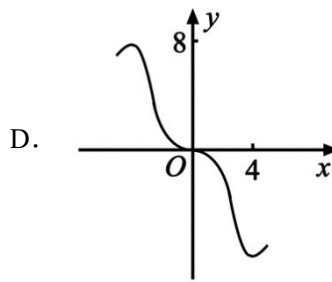
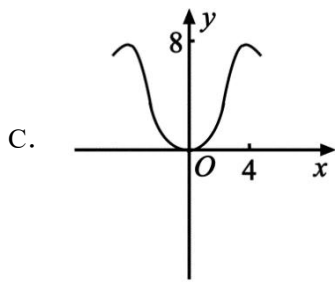
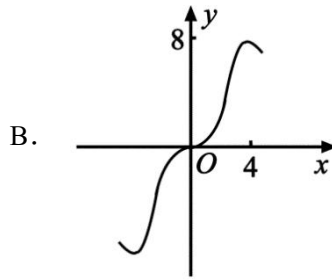
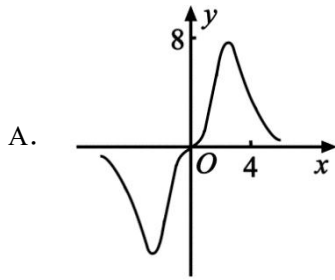
当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1$, 得 $f(x) = -e^{-x} + 1$. 故选 D.

【点睛】

本题考查分段函数的奇偶性和解析式, 渗透了数学抽象和数学运算素养. 采取代换法, 利用

转化与化归的思想解题.

29. 【2019 年新课标 3 卷理科】函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图像大致为



【答案】B

【解析】

【分析】

由分子、分母的奇偶性，易于确定函数为奇函数，由 $f(4)$ 的近似值即可得出结果.

【详解】

设 $y = f(x) = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ ，则 $f(-x) = \frac{2(-x)^3}{2^{-x} + 2^x} = -\frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}} = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点成中心对称，排除选项 C. 又 $f(4) = \frac{2 \times 4^3}{2^4 + 2^{-4}} > 0$ ，排除选项 D； $f(6) = \frac{2 \times 6^3}{2^6 + 2^{-6}} \approx 7$ ，排除选项 A，故选 B.

【点睛】

本题通过判断函数的奇偶性，缩小考察范围，通过计算特殊函数值，最后做出选择. 本题较易，注重了基础知识、基本计算能力的考查.

30. 【2019 年新课标 3 卷理科】设 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 单调递减，则

A. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

B. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

$$C. f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$$

$$D. f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$$

【答案】C

【解析】

由已知函数为偶函数，把 $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$, $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$, $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$ ，转化为同一个单调区间上，再比较大小.

【详解】

$$\because f(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 的偶函数}, \therefore f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) = f(\log_3 4).$$

$$\because \log_3 4 > \log_3 3 = 1, 1 = 2^0 > 2^{-\frac{2}{3}} > 2^{-\frac{3}{2}}, \therefore \log_3 4 > 2^{-\frac{2}{3}} > 2^{-\frac{3}{2}},$$

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

$$\therefore f(\log_3 4) < f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) < f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\therefore f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right), \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性、单调性，解题关键在于利用中间量大小比较同一区间的取值.

$$31. \text{【2018 年新课标 1 卷理科】已知函数 } f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases} g(x) = f(x) + x + a. \text{ 若 } g(x)$$

存在 2 个零点，则 a 的取值范围是

$$A. [-1, 0)$$

$$B. [0, +\infty)$$

$$C. [-1, +\infty)$$

$$D. [1, +\infty)$$

【答案】C

【解析】

【详解】

分析：首先根据 $g(x)$ 存在 2 个零点，得到方程 $f(x) + x + a = 0$ 有两个解，将其转化为

$f(x) = -x - a$ 有两个解，即直线 $y = -x - a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有两个交点，根据题中所给的函数

解析式，画出函数 $f(x)$ 的图像（将 $e^x (x > 0)$ 去掉），再画出直线 $y = -x$ ，并将其上下移动，从图中可以发现，当 $-a \leq 1$ 时，满足 $y = -x - a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有两个交点，从而求得结果.

详解：画出函数 $f(x)$ 的图像， $y = e^x$ 在 y 轴右侧的去掉，

再画出直线 $y = -x$ ，之后上下移动，

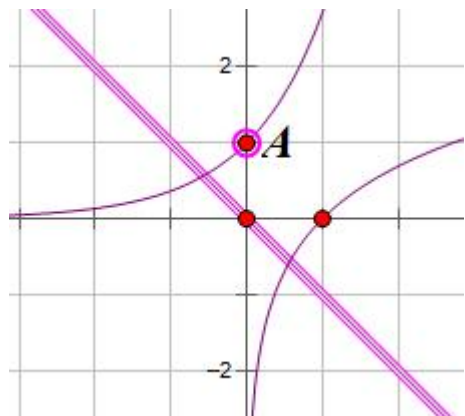
可以发现当直线过点 A 时，直线与函数图像有两个交点，

并且向下可以无限移动，都可以保证直线与函数的图像有两个交点，

即方程 $f(x) = -x - a$ 有两个解，

也就是函数 $g(x)$ 有两个零点，

此时满足 $-a \leq 1$ ，即 $a \geq -1$ ，故选 C.



点睛：该题考查的是有关已知函数零点个数求有关参数的取值范围问题，在求解的过程中，解题的思路是将函数零点个数问题转化为方程解的个数问题，将式子移项变形，转化为两条曲线交点的问题，画出函数的图像以及相应的直线，在直线移动的过程中，利用数形结合思想，求得相应的结果.

32. 【2018 年新课标 1 卷文科】设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ，则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

【答案】D

【解析】

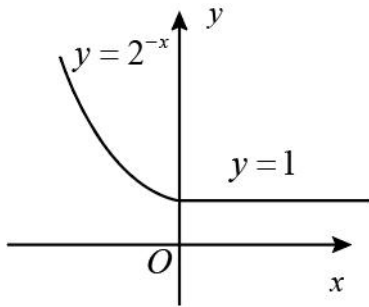
【分析】

分析：首先根据题中所给的函数解析式，将函数图像画出来，从图中可以发现若有

$f(x+1) < f(2x)$ 成立，一定会有 $\begin{cases} 2x < 0 \\ 2x < x+1 \end{cases}$ ，从而求得结果.

详解：将函数 $f(x)$ 的图像画出来，观察图像可知会有 $\begin{cases} 2x < 0 \\ 2x < x+1 \end{cases}$ ，解得 $x < 0$ ，所以满足

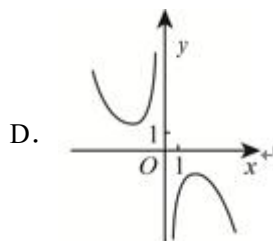
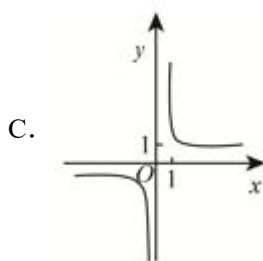
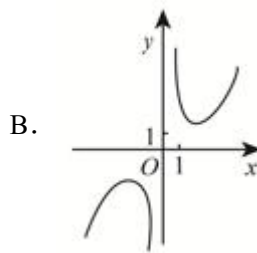
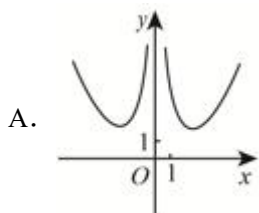
$f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 $(-\infty, 0)$ ，故选 D.



点睛：该题考查的是有关通过函数值的大小来推断自变量的大小关系，从而求得相关的参数的值的问题，在求解的过程中，需要利用函数解析式画出函数图像，从而得到要出现函数值的大小，绝对不是常函数，从而确定出自变量的所处的位置，结合函数值的大小，确定出自变量的大小，从而得到其等价的不等式组，从而求得结果.

【详解】

33. 【2018 年新课标 2 卷理科】函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为 ()



【答案】B

【解析】

【详解】

分析：通过研究函数奇偶性以及单调性，确定函数图像.

详解：∵ $x \neq 0, f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{x^2} = -f(x) \therefore f(x)$ 为奇函数，舍去 A,

∵ $f(1) = e - e^{-1} > 0 \therefore$ 舍去 D;

∵ $f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})x^2 - (e^x - e^{-x})2x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x + (x+2)e^{-x}}{x^3} \therefore x > 2, f'(x) > 0,$

所以舍去 C; 因此选 B.

点睛：有关函数图象识别问题的常见题型及解题思路 (1) 由函数的定义域，判断图象左右的位置，由函数的值域，判断图象的上下位置；(2) 由函数的单调性，判断图象的变化趋势；(3) 由函数的奇偶性，判断图象的对称性；(4) 由函数的周期性，判断图象的循环往复.

34. 【2018 年新课标 2 卷理科】已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足

$f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

【答案】C

【解析】

【详解】

分析：先根据奇函数性质以及对称性确定函数周期，再根据周期以及对应函数值求结果.

详解：因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，且 $f(1-x) = f(1+x)$,

所以 $f(1+x) = -f(x-1) \therefore f(3+x) = -f(x+1) = f(x-1) \therefore T = 4,$

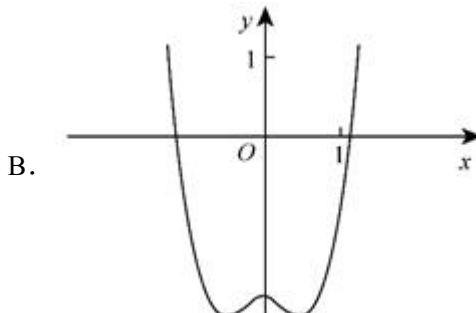
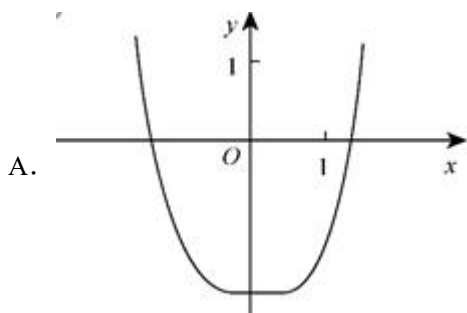
因此 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2),$

因为 $f(3) = -f(1), f(4) = -f(2)$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0,$

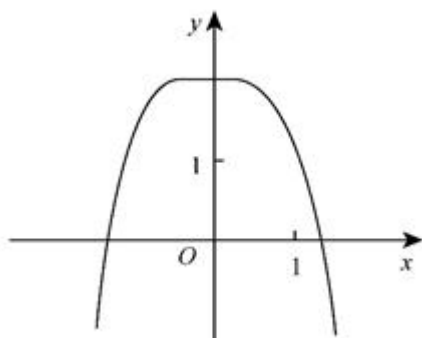
∵ $f(2) = f(-2) = -f(2) \therefore f(2) = 0$, 从而 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = f(1) = 2$, 选 C.

点睛：函数的奇偶性与周期性相结合的问题多考查求值问题，常利用奇偶性及周期性进行变换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解.

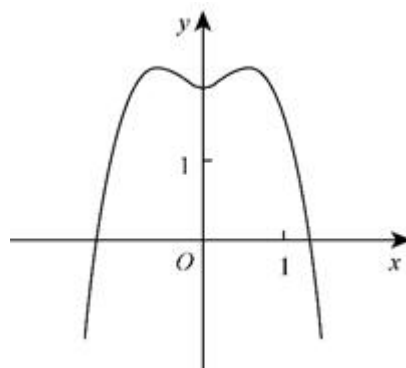
35. 【2018 年新课标 3 卷理科】函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图像大致为



C.



D.



【答案】D

【解析】

【详解】

分析：根据函数图象的特殊点，利用函数的导数研究函数的单调性，由排除法可得结果.

详解：函数过定点 $(0,2)$ ，排除 A,B ，

求得函数的导数 $f'(x) = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1)$ ，

由 $f'(x) > 0$ 得 $2x(2x^2 - 1) < 0$ ，

得 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，此时函数单调递增，排除 C ，故选 D .

点睛：本题通过对多个图象的选择考查函数的图象与性质，属于中档题.这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循.解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及 $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时函数图象的变化趋势，利用排除法，将不合题意的选项一一排除.

36. 【2018 年新课标 3 卷理科】设 $a = \log_{0.2} 0.3$ ， $b = \log_2 0.3$ ，则

A. $a+b < ab < 0$

B. $ab < a+b < 0$

C. $a+b < 0 < ab$

D. $ab < 0 < a+b$

【答案】B

【解析】

【详解】

分析：求出 $\frac{1}{a} = \log 0.3^{0.2}$, $\frac{1}{b} = \log 0.3^2$ ，得到 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的范围，进而可得结果.

详解： $\therefore a = \log 0.2^{0.3}$, $b = \log 2^{0.3}$

$$\therefore \frac{1}{a} = \log 0.3^{0.2}, \frac{1}{b} = \log 0.3^2$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{0.3} 0.4$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1, \text{即 } 0 < \frac{a+b}{ab} < 1$$

又 $\because a > 0, b < 0$

$$\therefore ab < 0 \text{ 即 } ab < a + b < 0$$

故选 B.

点睛：本题主要考查对数的运算和不等式，属于中档题.

37. 【2022 年新高考 1 卷】已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R ，记 $g(x) = f'(x)$ ，若 $f(\frac{3}{2} - 2x)$ ， $g(2 + x)$ 均为偶函数，则 ()

A. $f(0) = 0$ B. $g(-\frac{1}{2}) = 0$ C. $f(-1) = f(4)$ D. $g(-1) = g(2)$

【答案】BC

【解析】

【分析】

转化题设条件为函数的对称性，结合原函数与导函数图象的关系，根据函数的性质逐项判断即可得解.

【详解】

因为 $f(\frac{3}{2} - 2x)$ ， $g(2 + x)$ 均为偶函数，

所以 $f(\frac{3}{2} - 2x) = f(\frac{3}{2} + 2x)$ 即 $f(\frac{3}{2} - x) = f(\frac{3}{2} + x)$ ， $g(2 + x) = g(2 - x)$ ，

所以 $f(3 - x) = f(x)$ ， $g(4 - x) = g(x)$ ，则 $f(-1) = f(4)$ ，故 C 正确；

函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的图象分别关于直线 $x = \frac{3}{2}$ ， $x = 2$ 对称，

又 $g(x) = f'(x)$ ，且函数 $f(x)$ 可导，

所以 $g(\frac{3}{2}) = 0$ ， $g(3 - x) = -g(x)$ ，

所以 $g(4 - x) = g(x) = -g(3 - x)$ ，所以 $g(x + 2) = -g(x + 1) = g(x)$ ，

所以 $g(-\frac{1}{2}) = g(\frac{3}{2}) = 0$ ， $g(-1) = g(1) = -g(2)$ ，故 B 正确，D 错误；

若函数 $f(x)$ 满足题设条件，则函数 $f(x) + C$ (C 为常数) 也满足题设条件，所以无法确定 $f(x)$ 的函数值，故 A 错误.

故选：BC.

【点睛】

关键点点睛：解决本题的关键是转化题干条件为抽象函数的性质，准确把握原函数与导函数图象间的关系，准确把握函数的性质（必要时结合图象）即可得解.

38. 【2021 年新高考 2 卷】设正整数 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$ ，其中 $a_i \in \{0, 1\}$ ，

记 $\omega(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ ，则（ ）

A. $\omega(2n) = \omega(n)$

B. $\omega(2n+3) = \omega(n)+1$

C. $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$

D. $\omega(2^n - 1) = n$

【答案】ACD

【解析】

【分析】

利用 $\omega(n)$ 的定义可判断 ACD 选项的正误，利用特殊值法可判断 B 选项的正误.

【详解】

对于 A 选项， $\omega(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ ， $2n = a_0 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^2 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^k + a_k \cdot 2^{k+1}$ ，

所以， $\omega(2n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = \omega(n)$ ，A 选项正确；

对于 B 选项，取 $n = 2$ ， $2n+3 = 7 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$ ， $\therefore \omega(7) = 3$ ，

而 $2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$ ，则 $\omega(2) = 1$ ，即 $\omega(7) \neq \omega(2)+1$ ，B 选项错误；

对于 C 选项， $8n+5 = a_0 \cdot 2^3 + a_1 \cdot 2^4 + \cdots + a_k \cdot 2^{k+3} + 5 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + a_0 \cdot 2^3 + a_1 \cdot 2^4 + \cdots + a_k \cdot 2^{k+3}$ ，

所以， $\omega(8n+5) = 2 + a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ ，

$4n+3 = a_0 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^3 + \cdots + a_k \cdot 2^{k+2} + 3 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^3 + \cdots + a_k \cdot 2^{k+2}$ ，

所以， $\omega(4n+3) = 2 + a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ ，因此， $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$ ，C 选项正确；

对于 D 选项， $2^n - 1 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$ ，故 $\omega(2^n - 1) = n$ ，D 选项正确.

故选：ACD.

39. 【2022 年全国乙卷】若 $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$ 是奇函数，则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}; \ln 2.$

【解析】

【分析】

根据奇函数的定义即可求出.

【详解】

因为函数 $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$ 为奇函数, 所以其定义域关于原点对称.

由 $a + \frac{1}{1-x} \neq 0$ 可得, $(1-x)(a+1-ax) \neq 0$, 所以 $x = \frac{a+1}{a} = -1$, 解得: $a = -\frac{1}{2}$, 即函数

的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 再由 $f(0) = 0$ 可得, $b = \ln 2$. 即 $f(x) = \ln \left| -\frac{1}{2} + \right.$

$\left. \frac{1}{1-x} \right| + \ln 2 = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, 在定义域内满足 $f(-x) = -f(x)$, 符合题意.

故答案为: $-\frac{1}{2}; \ln 2.$

40. 【2021 年新高考 1 卷】已知函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】

利用偶函数的定义可求参数 a 的值.

【详解】

因为 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$, 故 $f(-x) = -x^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$,

因为 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(-x) = f(x)$,

时 $x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x}) = -x^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$, 整理得到 $(a-1)(2^x + 2^{-x}) = 0$,

故 $a = 1$,

故答案为: 1

41. 【2021 年新高考 1 卷】函数 $f(x) = |2x-1| - 2\ln x$ 的最小值为 _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】

由解析式知 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，讨论 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ 、 $x > 1$ ，并结合导数研究的单调性，即可求 $f(x)$ 最小值.

【详解】

由题设知： $f(x) = |2x - 1| - 2\ln x$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$\therefore$ 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时， $f(x) = 1 - 2x - 2\ln x$ ，此时 $f(x)$ 单调递减；

当 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ 时， $f(x) = 2x - 1 - 2\ln x$ ，有 $f'(x) = 2 - \frac{2}{x} \leq 0$ ，此时 $f(x)$ 单调递减；

当 $x > 1$ 时， $f(x) = 2x - 1 - 2\ln x$ ，有 $f'(x) = 2 - \frac{2}{x} > 0$ ，此时 $f(x)$ 单调递增；

又 $f(x)$ 在各分段的界点处连续，

$\therefore$ 综上有： $0 < x \leq 1$ 时， $f(x)$ 单调递减， $x > 1$ 时， $f(x)$ 单调递增；

$\therefore f(x) \geq f(1) = 1$

故答案为：1.

42. 【2021 年新高考 2 卷】写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$ ：_____.

① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$ ；② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ；③ $f'(x)$ 是奇函数.

【答案】 $f(x) = x^4$ （答案不唯一， $f(x) = x^{2n}$ ($n \in N^*$) 均满足）

【解析】

【分析】

根据幂函数的性质可得所求的 $f(x)$.

【详解】

取 $f(x) = x^4$ ，则 $f(x_1 x_2) = (x_1 x_2)^4 = x_1^4 x_2^4 = f(x_1) f(x_2)$ ，满足①，

$f'(x) = 4x^3$ ， $x > 0$ 时有 $f'(x) > 0$ ，满足②，

$f'(x) = 4x^3$ 的定义域为 R ，

又 $f'(-x) = -4x^3 = -f'(x)$ ，故 $f'(x)$ 是奇函数，满足③.

故答案为： $f(x) = x^4$ （答案不唯一， $f(x) = x^{2n}$ ($n \in N^*$) 均满足）

43. 【2019 年新课标 2 卷理科】已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = -e^{ax}$. 若 $f(\ln 2) = 8$ ，

则 $a =$ _____.

【答案】-3

【解析】

【分析】

当 $x > 0$ 时 $-x < 0$, $f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$ 代入条件即可得解.

【详解】

因为 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时 $-x < 0$, $f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$.

又因为 $\ln 2 \in (0, 1)$, $f(\ln 2) = 8$,

所以 $e^{-a \ln 2} = 8$, 两边取以 e 为底的对数得 $-a \ln 2 = 3 \ln 2$, 所以 $-a = 3$, 即 $a = -3$.

【点睛】

本题主要考查函数奇偶性, 对数的计算. 渗透了数学运算、直观想象素养. 使用转化思想得出答案.

44. 【2018 年新课标 1 卷文科】已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a =$ _____.

【答案】-7

【解析】

【详解】

分析: 首先利用题的条件 $f(3) = 1$, 将其代入解析式, 得到 $f(3) = \log_2(9 + a) = 1$, 从而得到

$9 + a = 2$, 从而求得 $a = -7$, 得到答案.

详解: 根据题意有 $f(3) = \log_2(9 + a) = 1$, 可得 $9 + a = 2$, 所以 $a = -7$, 故答案是 -7.

点睛: 该题考查的是有关已知某个自变量对应函数值的大小, 来确定有关参数值的问题, 在求解的过程中, 需要将自变量代入函数解析式, 求解即可得结果, 属于基础题目.

45. 【2018 年新课标 3 卷文科】已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ _____.

【答案】-2

【解析】

【分析】

发现 $f(x) + f(-x) = 2$, 计算可得结果.

【详解】

因为 $f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1 + \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1 = \ln(1+x^2-x^2) + 2 = 2$,

$\therefore f(a) + f(-a) = 2$, 且 $f(a) = 4$, 则 $f(-a) = -2$.

故答案为-2

【点睛】

本题主要考查函数的性质，由函数解析式，计算发现 $f(x) + f(-x) = 2$ 是关键，属于中档题.

